حمل الآن

مجانا وحصريا

المراجعة رقم (1)

الترم الثانى





المتتابعات والمتسلسلات

درس تمهيدى :

حل المعادلتين الآنيتين فى متغيرين

• أولاً : كلا المعادلتين من الدرجة الأولى :

توجد طريقتان للحل :

(١) طريقة الحذف :

(أ) نوحّد معاملات أحد المتغيرين فى المعادلتين .

(ب) نجمع (إذا إختلفت إشارتى المتغير) ونطرح (إذا تشابهت إشارتى المتغير) .

(ج) نوجد قيمة المتغير الظاهر

(د) نوجد قيمة المتغير الآخر بالتعويض فى أى من المعادلتين .

مثال (١)

حل المعادلتين : ٣ س + ٢ ص = ١ ، ٢ س − ص + ٤ = ٠

الحل

٣ س + ٢ ص = ١ ....× ١ .... (١)

٢ س − ص = − ٤ ......× ٢ ....(٢)

٣ س + ٢ ص = ١ .... (١)

٤ س − ٢ ص = − ٨ ....(٢)

بالجمع

٧ س = − ٧ ∴ س = − ١ وبالتعويض فى (٢)

∴ ٢(−١) − ص + ٤ = ٠ ∴ − ٢ + ٤ = ص ∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = (− ١ ، ٢)

حل آخر :

بضرب المعادلة الأولى × ٢ والمعادلة الثانية × ٣

∴ ٦ س + ٤ ص = ٢

، −٦ س ± ٣ ص = ± ١٢ وبالطرح

∴ ٧ ص = ١٤ ∴ ص = ٢

وبالتعويض فى (٢) ∴ ٢ س − ٢ + ٤ = ٠ ∴ ٢ س = − ٢ ∴ س = − ١

∴ مجموعة الحل = (− ١ ، ٢)

(٢) طريقة التعويض :

(أ) من إحدى المعادلتين (نختار الأسهل) نوجد قيمة مجهول بدلالة الآخر فتكون لدينا المعادلة (٣) .

(ب) نعوّض فى المعادلة الأخرى فيصبح لدينا معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد – نوجد قيمته .

(ج) نوجد قيمة المتغير الآخر بالتعويض فى المعادلة (٣).

مثال (٢) : نفس المثال السابق

حل المعادلتين : ٣ س + ٢ ص = ١ ، ٢ س − ص + ٤ = ٠

الحل

من المعادلة (٢) : ص = ٢ س + ٤ .... (٣)

بالتعويض فى (١) : ∴ ٣ س + ٢ (٢ س + ٤) = ١

∴ ٣ س + ٤ س + ٨ = ١ ∴ ٧ س = ١ − ٨

∴ ٧ س = − ٧ ومنها س = − ١

بالتعويض فى (٣) : ∴ ص = ٢ (− ١) + ٤ ∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = (− ١ ، ٢)

• استخدام الآلة الحاسبة فى حل المعادلتين الآنيتين من الدرجة الأولى فى متغيرين :

(١) نضغط MODE 3 وذلك لاختيار نظام المعادلات

(٢) نضغط 1 وذلك لاختيار المعادلة من الدرجة الأولى

(٣) ندخل معاملات س ، ص والحد المطلق ج وذلك بكتابة العدد ثم الضغط بعده مباشرة على = ونكرر نفس الأمر بالنسبة للمعادلة الثانية

(٤) بالضغط على = نستدعى قيمة المتغير الأول ، وبالضغط مرة أخرى على = نستدعى قيمة المتغير الثانى .

(٥) للخروج من البرنامج نضغط على MODE 1

ثانياً : إحدى المعادلتين من الدرجة الأولى والأخرى درجة ثانية :

نتبع طريقة التعويض :

(١) من المعادلة ذات الدرجة الأولى نوجد قيمة مجهول بدلالة الآخر ونعطيها رقم (٣)

(٢) نعوض من المعادلة رقم (٣) فى المعادلة رقم (٢)

(٣) نقوم بفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهه ثم نحسب قيمة المجهول المتبقى

(٤) نعوض فى المعادلة رقم (٣) لإيجاد قيمة المجهول الآخر .

مثال (٣)

حل المعادلتين : س + ٢ ص = ٥ ، س^{٢} − ٤ س ص − س = − ٦

الحل

س + ٢ ص = ٥ ....(١)

س^{٢} − ٤ س ص − س = − ٦ ....(٢)

من (١) : س = ٥ − ٢ ص ....(٣)

بالتعويض فى (٢) : (٥ − ٢ ص)^{٢} − ٤ ص (٥ − ٢ ص) − (٥ − ٢ ص) = − ٦

٢٥ − ٢٠ ص + ٤ ص^{٢} − ٢٠ ص + ٨ ص^{٢} − ٥ + ٢ ص + ٦ = ٠

١٢ ص^{٢} − ٣٨ ص + ٢٦ = ٠ (وبالقسمة على ٢ للتبسيط)

∴ ٦ ص^{٢} − ١٩ ص + ١٣ = ٠ ∴ (٦ ص − ١٣) (ص − ١) = ٠

∴ ص = $\frac{١٣}{٦}$ أ، ص = ١

بالتعويض فى (٣) : ∴ س = ٥ − ٢ × $\frac{١٣}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = ٥ − ٢(١) = ٣

مجموعة الحل = { ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١٣}{٦}$) ، (٣ ، ١) }

- ثالثاً : كلا المعادلتين من الدرجة الثانية (أو أعلى) :

نتبع طريقة التحليل الكامل ثم القسمة :

(١) تحليل كل معادلة تحليلاً كاملاً .

(٢) قسمة إحدى المعادلتين على الأخرى تنتج لنا معادلة جديدة فى متغير واحد .

(٣) نحل المعادلة الناتجة فنحصل على قيمة أحد المتغيرين .

(٤) التعويض فى إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال (٤)

حل المعادلتين : س ص + س ص^{٢} = ٢٤ ، س − س ص^{٢} = ٤٨

الحل

المعادلة الأولى : س ص (١ + ص) = ٢٤ ....(١)

المعادلة الثانية : س (١ − ص^{٢}) = ٤٨

∴ س (١ − ص) (١ + ص) = ٤٨ ....(٢)

بقسمة (١) على (٢) :

∴ $\frac{\text{س ص}(١+\text{ص})}{\text{س}(١-\text{ص})(١+\text{ص})} = \frac{٢٤}{٤٨}$ ∴ $\frac{\text{ص}}{١-\text{ص}} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ ص = ١ − ص ∴ ٣ ص = ١ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (٢) : ∴ س (١ − $\frac{١}{٩}$) = ٤٨ ∴ س × $\frac{٨}{٩}$ = ٤٨

∴ س = ٤٨ × $\frac{٩}{٨}$ = ٥٤ ∴ مجموعة الحل = { (٥٤ ، $\frac{١}{٣}$) }

تمارين (١)

أوجد مجموعة حل كل زوج من المعادلتين الآنيتين الآتيتين :

(١) س + ٦ ص = ٥١ ، س + ١٥ ص = ١٠٥

(٢) ٢ س + ٩ ص = ٢٤ ، س + ٧ ص = ١٧

(٣) س + ص = ١٤ ، س ص = ٤٥

(٤) س + ٦ ص = ٠ ، (س + ص)^{٢} + (س + ٣ ص)^{٢} = ٣٠٦

(٥) س + س ص + س ص^{٢} = ٧

، س ص^{٣} + س ص^{٤} + س ص^{٥} = − ١٨٩

(٥) س + س ص = ١٦ ، س ص^{٢} + س ص^{٣} = ٤

الوحدة الأولى :

١ـ المتتابعة

- المتتابعة هى دالة مجالها ص$^{+}$ أو مجموعة جزئية منها ومداها ح
- يمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين :

(ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، .... ، ح$_{ن}$) و نرمز لها بالرمز (ح$_{ن}$)

- ملاحظات :

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة .

(٢) الرمز (ح$_{ن}$) يعبر عن المتتابعة ، بينما الرمز ح$_{ن}$ يعبر عن حدها النونى .

الحد العام لمتتابعة

يسمى أيضاً بالحد النونى ونرمز له بالرمز ح$_{ن}$ وهو صورة العنصر الذى ترتيبه ن فى مجال المتتابعة .

- **المتتابعة المنتهية** :

هى متتابعة عدد حدودها منتهياً أى يمكن حصره أو عده .

- **المتتابعة غير المنتهية** :

هى متتابعة عدد حدودها غير منته أى لها عدد لا نهائى من العناصر .

- **المتسلسلات ورمز التجميع** :

المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة ويكون لكل متتابعة توجد متسلسلة مرتبطة بها . ونكتب المتسلسلات بصورة مختصرة باستخدام رمز التجميع " Σ " (سيجما) .

- استخدام الآلة الحاسبة إيجاد ناتج متسلسلة :

على سبيل المثال : أوجد $\sum_{ر=٥}^{٩}$ (٢ ر + ١)

(١) نضغط على مفتاح سيجما : SHIFT log

(٢) نكتب قاعدة المتباينة (٢ ر + ١) كالآتى :

2 ALPHA) + 1 (X)

(٣) نتحرك بالأسهم لأعلى لنكتب عدد حدود المتتابعة (٩) ونتحرك لأسفل لكتابة رتبة الحد الذى نبدأ به (٥) .

(٥) نضغط مفتاح = ليظهر على الشاشة الناتج ٧٥

حاول أن تحل

(١) اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

(أ) متتابعة الأعداد الفردية السالبة التى تبدأ بالعدد (−١) .

(ب) متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ ، ٨١ والتى يقبل كل منها القسمة على ٥ .

الحل

(أ) (−١، −٣، −٥، −٧، ....)

(ب) (٥٥، ٦٠، ٦٥، ٧٠، ٧٥، ٨٠)

تفكير ناقد : هل توجد قاعدة لإيجاد الحد العام لجميع المتتابعات ؟ فسر إجابتك .

الحل

لا توجد قاعدة لإيجاد الحد العام لجميع المتتابعات لأن بعض المتتابعات ليس لها قاعدة معروفة وبالتالى ليس لها قاعدة للحد العام مثل متتابعة الأعداد الأولية : (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) .

(٢) اكتب الستة حدود الأولى للمتتابعة ($ح_ن$) المعرفة كالآتى :

$ح_1 = ٣$ ، $ح_ن = ٢ ح_{ن-1}$ حيث $ن \geqslant ٢$

الحل

عندما ن = ٢ ∴ $ح_2 = ٢ ح_1 \Leftarrow ح_2 = ٢ \times ٣ = ٦$

عندما ن = ٣ ∴ $ح_3 = ٢ ح_2 \Leftarrow ح_3 = ٢ \times ٦ = ١٢$

عندما ن = ٤ ∴ $ح_4 = ٢ ح_3 \Leftarrow ح_4 = ٢ \times ١٢ = ٢٤$

عندما ن = ٥ ∴ $ح_5 = ٢ ح_4 \Leftarrow ح_5 = ٢ \times ٢٤ = ٤٨$

عندما ن = ٦ ∴ $ح_6 = ٢ ح_5 \Leftarrow ح_6 = ٢ \times ٤٨ = ٩٦$

الحدود الستة الأولى للمتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٦٩)

(٣) اكتب كلاً من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة :

(أ) $ح_ن = ١ - ٣ن$ (إلى ٥ حدود ابتداء من الحد الأول)

(ب) $ح_ن = ن^٣$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداء من الحد الأول)

الحل

(أ) بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$ح_1 = ١ - ٣(١) = -٢$ ، $ح_2 = ١ - ٣(٢) = -٥$ ، $ح_3 = ١ - ٣(٣) = -٨$ ،

$ح_4 = ١ - ٣(٤) = -١١$ ، $ح_5 = ١ - ٣(٥) = -١٤$

∴ المتتابعة هى : (-٢ ، -٥ ، -٨ ، -١١ ، -١٤) منتهية

(ب) بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ....

$ح_1 = (١)^٣ = ١$ ، $ح_2 = (٢)^٣ = ٨$ ، $ح_3 = (٣)^٣ = ٢٧$ ، $ح_4 = (٤)^٣ = ٦٤$

، $ح_5 = (٥)^٣ = ١٢٥$ ∴ المتتابعة هى (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥ ، ....) غير منتهية

(٤) اكتب مفكوك كلاً من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة .

(أ) $\sum_{ر=1}^{٥} (٣ر - ٢)$ (ب) $\sum_{ر=1}^{٤} (ر + ١)^٢$

(جـ) $\sum_{ر=٥}^{٩} ٣ \times ٢^{ر-1}$

الحل

(أ) بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

∴ المتسلسلة هى : (١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣) ويكون $\sum_{ر=1}^{٥} (٣ر - ٢) = ٣٥$

(ب) بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

∴ المتسلسلة هى : (٤ + ٩ + ١٦ + ٣٦) ويكون $\sum_{ر=1}^{٤} (ر + ١)^٢ = ٦٥$

(جـ) بوضع ر = ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

∴ المتسلسلة هى : (٤٨ + ٩٦ + ١٩٢ + ٣٨٤ + ٧٦٨)

∴ $\sum_{ر=٥}^{٩} (٣ \times ٢^{ر-1}) = ١٤٨٨$

تمارين (١)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الحد الخامس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٥ هو ....

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٢) الحد العاشر من المتتابعة التى حدها النونى : $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ هو ....

(أ) $-\frac{٤}{٥}$ (ب) $-\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣) قاعدة المتتابعة ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ....) هى : ....

(أ) (ن - ١) (ن + ١) (ب) ن (ن + ١)

(جـ) ٢ن (ن + ١) (د) (ن + ١) (ن + ٢)

(٤) فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_{ن+1} = ن ح_ن$ إذا كان $ح_1 = ١$ فإن $ح_3 = ...$.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) الحد الرابع فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ن^٢ + ٣$ هو ....

(أ) ٧ (ب) ١١ (جـ) ١٩ (د) ٢٧

(٦) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=1}^{٥} (٢)^{ر-1} = ...$.

(أ) ٢١ (ب) ٣١ (جـ) ٤٤ (د) ١٥

(٧) المتسلسلة : ٥ × ١ + ٥ × ٢ + ٥ × ٣ + ... + ٥ × ١٠ تكتب باستخدام رمز المجموع بالصورة ....

(أ) $\sum_{ر=1}^{١٠} (٥ر + ١)$ (ب) $\sum_{ر=1}^{١٠} ٥ر$

(جـ) $\sum_{ر=1}^{١٠} (٥ + ر)$ (د) $\sum_{ر=1}^{١٠} ٥(ر + ١)$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) بيّن أى من المتتابعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

(أ) (١ ، ٤ ، ٧ ، ....)

(ب) (٣ ، ٥ ، ٧ ، .... ، ٢١)

(جـ) $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^٢ - ١$ ، $ن \in ص^+$

(ء) $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = \frac{٣}{ن} + ٣$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

(٢) اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

(أ) $ع_ن = \frac{١}{٣ن - ٥}$

(ب) $ع_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

(٣) اكتب كلاً من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة :

(أ) $ع_ن = ٢ن - ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول)

(ب) $ع_ن = ن^٢$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول)

(٤) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى :

(أ) $ع_١ = ٣$ ، $ع_{ن+١} = ن \, ع_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

(ب) $ع_١ = ٣$ ، $ع_ن = ٢ ع_{ن-١}$ لكل $ن \geqslant ٢$

(جـ) $ع_١ = -١$ ، $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

(ء) $ع_١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٥$ ، $ع_{ن+٢} = ع_{ن+١} + ع_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

(٥) اكتشف النمط ثم اكتب الحد التالى :

(أ) ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ....

(ب) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، ....

(جـ) ٦٥ ، ٦٩ ، ٧٣ ، ٧٧ ، ٨١ ، ....

(ء) ٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ٤٨ ، ....

(٦) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

(أ) $\sum_{ر=١}^{٨} ((-١)^ر + ٤ر)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$

(٧) اكتب مفكوك كلاً من المتسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموع المفكوك وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢)$ (ب) $\sum_{ك=٣}^{٩} (٣ك + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٥} (\frac{١}{٣})^ر$

(٨) يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يومياً .

(أ) اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة .

(ب) أوجد الحد العام لهذه المتتابهة .

(جـ) أوجد الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع .

(ء) فى أى يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ وضح إجابتك .

الوحدة الأولى :

٢ ـ المتتابعة الحسابية

- تعريف : المتتابعة الحسابية هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة ونرمز له بالرمز (ء) .
- $ء = ع_{ن+١} - ع_ن$ لكل $ن \in ص^+$
- الصورة العامة للمتتابعة الحسابية هى :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

- المتتابعة الحسابية التزايدية :

تكون المتتابعة الحسابية متزايدة إذا كان اساسها موجباً ($ء > ٠$)

- المتتابعة الحسابية التناقصية :

تكون المتتابعة الحسابية تناقصية إذا كان اساسها سالباً ($ء < ٠$)

- التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية :

المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث $ن \in ص^+$ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة .

- الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية :

$$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$$

وإذا كان (ل) هو الحد الأخير فى المتتابعة الحسابية فإن :

$$ل = أ + (ن - ١) ء$$

حيث ن = عدد حدود المتتابعة .

- ملاحظات هامة على الحد العام للمتتابعة الحسابية :

(١) لإيجاد رتبة الحد الذى يساوى قيمة معلومة (ك) نضع : $ع_ن = ك$

(٢) لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من ك نضع : $ع_ن > ك$

(٣) لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أصغر من ك نضع : $ع_ن < ك$

(٤) لإيجاد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية نضع : $ع_ن < ٠$.

- تعيين المتتابعة الحسابية :

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول (أ) وأساسها (ء) وذلك بحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى متغيرين أ ، ء

- ملاحظات :

(١) إذا عُلم مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة : أ − ى ، أ ، أ + ى

(٢) إذا عُلم مجموع أربعة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة : أ − ٣ى ، أ − ى ، أ + ى ، أ + ٣ى

الأوساط الحسابية

- تعريف : إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن ب تسمى الوسط الحسابى بين العددين أ ، جـ

حيث **٢ ب = أ + جـ أ، ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$**

- إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين :

(١) نوجد عدد حدود المتتابعة (ن) = عدد الأوساط + ٢

(٢) العددين المعلومين هما أ ، ح$_{ن}$ ثم نحسب (ى) من قانون الحد العام ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١) ى

(٣) تكون الأوساط هى (أ + ى ، أ + ٢ى ، .... ، ل − ى)

- ملحوظة هامة :

الوسط الأول = ح$_{٢}$ = أ + ى ، الوسط السابع = ح$_{٨}$ = أ + ٧ى

، الوسط الأخير = ل − ى ، الوسط قبل الأخير = ل − ٢ى وهكذا

حاول أن تحل

(١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية ؟ ولماذا ؟

(أ) (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨)

(ب) (−١٤ ، −٨ ، −٢ ، ٤ ، ١٠)

(جـ) ح$_{ن}$ = ٢ن + ٣ (ى) ح$_{ن}$ = ١ − $\frac{٣}{٢ن}$

الحل

(أ) ٣٣ − ٣٨ = ٢٨ − ٣٣ = ٢٣ − ٢٨ = ١٨ − ٢٣ = −٥ ∴ م.ح : ى = −٥

(ب) −٨ − (−١٤) = −٢ − (−٨) = ٤ − (−٢) = ١٠ − ٤ = ٦

∴ م.ح : ى = ٦

(جـ) مقدار من الدرجة الأولى فى ن ⇐ م.ح : ى = ٢

(ى) ليست متتابعة حسابية لأنها ليست من الدرجة الأولى فى ن .

تفكير ناقد : ماذا تتوقع أن تكون المتتابعة الحسابية (ح$_{ن}$) إذا كانت (ى = ٠) ؟ فسر إجابتك .

الحل

أتوقع أن تكون المتتابعة الحسابية ثابتة القيم مثل (٣ ، ٣ ، ٣ ، ....) وهى بذلك تكون لا تزايدية ولا تناقصية

(٢) فى المتتابعة (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٣ن − ٥

(أ) أثبت أن (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية ، وأوجد أساسها .

(ب) بيّن أن هذه المتتابعة تزايدية .

(جـ) أوجد حدها الخامس عشر .

(ى) إذا كان ح$_{ن}$ = ٨٥ فما قيمة ن ؟

الحل

(أ) ح$_{ن+١}$ = ٣(ن + ١) − ٥ = ٣ن − ٢

، ح$_{ن+١}$ − ح$_{ن}$ = ٣ن − ٢ − ٣ن + ٥ = ٣ (مقدار ثابت) ∴ م.ح : ى = ٣

(ب) ∵ ى > ٠ ∴ المتتابعة تزايدية

(جـ) ح$_{١}$ = ٣ × ١ − ٥ = −٢ ∴ ح$_{١٥}$ = أ + ١٤ى = −٢ + ١٤ × ٣ = ٤٠

(ى) ٨٥ = ٣ن − ٥ ⇐ ن = ٣٠ ∴ ح$_{٣٠}$ = ٨٥

(٣) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، ٠٠٠٠٠ ، ٦٥) ثم أوجد قيمة حدها العاشر من النهاية .

الحل

أ = ٧ ، ى = ٩ − ٧ = ٢ ، ل = ٦٥ ⇐ ٦٥ = ٧ + (ن − ١) × ٢ ∴ ن = ٣٠

لإيجاد ح$_{١٠}$ من النهاية نكتب المتتابعة من النهاية كالآتى : (٦٥ ، ٦٣ ، ٦١ ، ....)

∴ ح$_{١٠}$ من النهاية = ٧ + ٩ × (−٢) = −١١

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية (ح$_{ن}$) التى فيها :

ح$_{٦}$ = ١٧ ، ح$_{٣}$ + ح$_{١٠}$ = ٣٧

الحل

ح$_{٦}$ = ١٧ ⇐ أ + ٥ى = ١٧ ∴ أ = ١٧ − ٥ى .... (١)

، ح$_{٣}$ + ح$_{١٠}$ = ٣٧ ⇐ أ + ٢ى + أ + ٩ى = ٣٧ ∴ ٢أ + ١١ى = ٣٧

وبالتعويض من (١) ∴ ٢ (١٧ − ٥ى) + ١١ى = ٣٧

∴ ٣٤ − ١٠ى + ١١ى = ٣٧ ∴ ى = ٣

ومن (١) ∴ أ = ١٧ − ٥ × ٣ = ٢ ∴ م.ح هى : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ٠٠٠٠٠٠)

تعبير شفهى : أكمل :

(١) إذا كونت (٣ ، ٧ ، ١١ ، .... ، ٤٣ ، ٤٧) متتابعة حسابية فإن ٧ ، ١١ ، ١٥ ، .... ، ٤٣ تسمى ....

(٢) عدد الأوساط الحسابية = عدد حدود المتتابعة ....

(٣) عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد أوساط هذه المتتابعة ......

الحل

(١) أوساط حسابية

(٢) عدد الأوساط الحسابية = عدد حدود المتتابعة − ٢

(٣) عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢

(٥) أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين : ١٣ ، ٤٨ .

الحل

ن = ٤ + ٢ = ٦ ، أ = ١٣ ، ح$_{٦}$ = ٤٨ ⇐ أ + ٥ى = ٤٨ ∴ ١٣ + ٥ى = ٤٨

∴ ٥ى = ٣٥ ∴ ى = ٧ ∴ الأوساط هى : (٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١)

تمارين (٢)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الحد السابع فى المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) هو .....

(أ) ٢٠ (ب) ٢٣ (جـ) ٣٢ (د) ١٧

(٢) الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ......) هو ......

(أ) $(ح_{ن})$ = ٨١ + ٤ن (ب) $(ح_{ن})$ = ٨٥ + ٤ن

(جـ) $(ح_{ن})$ = ٨٥ − ٤ن (د) ٨١ − ٤ن

(٣) إذا كان : ٢أ + ١ ، ٥أ − ١ ، ٦أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) إذا كانت : (٢٩ ، س ، .... ، ٣س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن س = ...

(أ) ٢١ (ب) ٣١ (جـ) ٩٥ (د) ١٢٤

(٥) إذا كان : $ح_{ن}$ = ١٥ − ٣ن فإن أول حد سالب فى المتتابعة $(ح_{ن})$ هو ....

(أ) $ح_{٣}$ (ب) $ح_{٥}$ (جـ) $ح_{٦}$ (د) $ح_{١٥}$

(٦) الوسط الحسابى للعددين : ٨ ، ١٢ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٧) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س =

(أ) ٢٦ (ب) ١٦ (جـ) ٤٢ (د) ٢١

(٨) الوسط الحسابى للعددين : ٣س − ٧ ، ٥س + ٣ هو ....

(أ) ٤س − ٥ (ب) ٤س − ٢

(جـ) ٤س + ٢ (د) ٨س + ٤

(٩) إذا كان : أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية فى تتابع حسابى فإن القيمة العددية للمقدار (أ + ب) تساوى ....

(أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (جـ) ١٢ (د) ٦

(١٠) إذا كانت $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية حيث : $ح_{ن}$ = ٣ن − ٢ فإن الوسط الحسابى بين $ح_{٥}$ ، $ح_{١١}$ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٢٢ (د) ٢٦

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

أولاً : مسائل على الحد النونى للمتتابعة الحسابية :

(١) فى المتتابعة الحسابية : (١٦ + ٤٠س ، ٥٠س − ٩ ، .... ، ٣س + ١٥ ، ٥س + ٦) أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدودها

(٢) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ....) أوجد :

(أ) قيمة الحد الثامن (ب) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢

(٣) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...... ، ٨٠)

(٤) فى المتتابعة الحسابية : (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ...... ، − ١٣٣) أوجد :

(أ) قيمة الحد السابع (ب) عدد حدود المتتابعة .

(٥) أوجد عدد حدود المتتابعة (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ...... ، ٥٠) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية .

(٦) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية : (١١ ، ٩ ، ٧ ، ....) .

(٧) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة $(ح_{ن})$ = (٢ + ٥ن) ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من المتتابعة . أوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠ .

ثانياً : مسائل على تعيين للمتتابعة الحسابية :

(٨) $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها : $ح_{١٠}$ = ١٨ ، $ح_{١٥}$ = ٣٤

أوجد هذه المتتابعة .

(٩) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، وحدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثانى .

(١٠) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، ومجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ ، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى المتتابعة .

(١١) $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها : $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ = ٩ ، $ح_{٥}$ = ٢٢

أوجد هذه المتتابعة .

(١٢) متتابعة حسابية حدها العشرون ٤١ ، ويزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة .
أوجد هذه المتتابعة .

(١٣) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس ٢٠ ، والنسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧ .

(١٤) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_{ن}$ = ٣٩ ، $ح_{٢ن}$ = ٧٩

فما قيمة ن ؟ ثم أوجد المتتابعة .

ثالثاً : مسائل على الأوساط الحسابية الحسابية :

(١٥) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ٤أ ، ٢ب هو ٢٠ فأوجد قيمة كل من : أ ، ب .

(١٦) أدخل ١٦ وسطاً حسابياً بين ٢٧ ، − ٢٤ .

(١٧) متتابعة حسابية حدها التاسع ٢٥ ، والوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ . أوجد هذه المتتابعة .

(١٨) إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ وكانت النسبة بين الوسط الثانى والوسط الأخير كنسبة ٢ : ٧ . أوجد عدد الأوساط .

الوحدة الأولى :

٣ ـ المتسلسلات الحسابية

- المتسلسلة الحسابية : هى عملية جمع حدود المتتابعة الحسابية .

مجموع ن حداً الأولى من متسلسلة حسابية

أولاً : بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) :

$$ج_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

ثانياً : بمعلومية حدها الأول (أ) والأساس (ء) :

$$ج_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$$

- ملاحظات هامة :

(١) لإيجاد المجموع $ج_ن$ يلزمنا معرفة عدد الحدود ن وإذا لم تكن معلومة فيمكننا إيجادها من القانون :
ل = أ + (ن − ١) ء

(٢) لإيجاد المجموع ابتداءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ثم نعوض عنه بدلاً من أ فى قانون المجموع .

(٣) لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع = ك نضع : $ج_ن$ = ك ونحسب قيمة ن .

(٤) عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن هو عدد الحدود الموجبة ونحسبة بوضع : $ح_ن > ٠$

(٥) إذا كانت ن عدداً فردياً فإنه يوجد حد أوسط واحد هو م = $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ ويكون $ج_ن$ = ن × م

(٦) إذا كانت ن عدداً زوجياً فإنه يوجد حدان أوسطان هما $ح_{\frac{ن}{٢}}$ ، وماٻليه $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$
ويكون $ج_ن = \frac{ن}{٢}$ (مجموع الوسطين)

حاول أن تحل

(١) أوجد :

(أ) $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$ (ب) $\sum_{ر=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥ ر)$

الحل

(أ) $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$ = (١١ + ١٧ + ٢٣ + ... + ١٢٥) وهى م . ح :

أ = ١١ ، ل = ١٢٥ ، ن = ٢٠ ∴ $ج_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}$ (١١ + ١٢٥) = ١٣٦٠

أو : باستخدام الآلة الحاسبة $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$ = ١٣٦٠ مباشرة .

(ب) $\sum_{ر=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥ ر)$: أ = $ح_٧$ = ١٢ − ٥ × ٧ = −٢٣

، ل = $ح_{٣٢}$ = ١٢ − ٥ × ٣٢ = −١٤٨ ، ن = ٣٢ − ٧ + ١ = ٢٦

∴ $ج_{٢٦}$ = ١٣ × (−٢٣ − ١٤٨) = −٢٢٢٣

أو باستخدام الآلة الحاسبة : $\sum_{ر=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥ ر)$ = −٢٢٢٣ مباشرة .

(٢) أوجد :

(أ) مجموع المتسلسلة الحسابية ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣

(ب) عدد حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى ٣ وحدها الأخير يساوى ٣٩ ومجموع ن حداً الأولى منها يساوى ٢١٠ .

الحل

(أ) أ = ٨٩ ، ء = ٨٥ − ٨٩ = −٤ ، ∵ ل = أ + (ن − ١) ء

∴ ٣٣ = ٨٩ + (ن − ١) × (−٤) ∴ ٩٣ − ٤ن = ٣٣ ⇐ ن = ١٥

∴ $ج_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ (٨٩ + ٣٣) = ٩١٥

أو باستخدام الآلة الحاسبة : $\sum_{ن=١}^{١٥} (٩٣ - ٤ن)$ = ٩١٥

(ب) أ = ٣ ، ل = ٣٩ ، $ج_ن$ = ٢١٠ = $\frac{ن}{٢}$ (٣ + ٣٩) ⇐ ن = ١٠

(٣) فى المتسلسلة الحسابية ٩ + ١٢ + ١٥ + ... أوجد :

(أ) مجموع ١٥ حداً الأولى منها .

(ب) مجموع حدود المتسلسلة ابتداءً من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر .

(جـ) عدد الحدود التى مجموعها يساوى ٧٥٠ ابتداءً من الحد الأول .

الحل

(أ) أ = ٩ ، ء = ٣ ∴ $ج_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ (٢ × ٩ + ١٤ × ٣) = ٤٥٠

أو : $ح_ن$ = ٩ + (ن − ١) × ٣ = ٩ + ٣ن − ٣ = ٣ن − ٦

⇐ $\sum_{ن=١}^{١٥} (٣ن - ٦)$ = ٤٥٠

(ب) $\sum_{ن=٥}^{١٥} (٣ن - ٦)$ = ٣٩٦

(جـ) ٧٥٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٩ + (ن − ١) × ٣] ∴ ١٥٠٠ = ن (١٥ + ٣ن)

∴ ٣ن² + ١٥ن − ١٥٠٠ = ٠ ⇐ ن = ٢٠ أ، ن = −٢٥ (مرفوض)

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها :

(أ) $ح_{١} = ٢٣$ ، $ح_{ن} = ٨٦$ ، $جـ_{ن} = ٥٤٥$

(ب) $ح_{١} = ١٧$ ، $ح_{ن} = -٩٥$ ، $جـ_{ن} = -٥٨٥$

الحل

(أ) $ح_{١} = ٢٣ \Leftarrow أ = ٢٣$ ، $ح_{ن} = ٨٦ \Leftarrow أ + (ن - ١)ء = ٨٦$

∴ $٢٣ + (ن - ١)ء = ٨٦ \Leftarrow (ن - ١)ء = ٦٣$ .... (١)

، $جـ_{ن} = ٥٤٥ \Leftarrow ٥٤٥ = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$ وبالتعويض من (١)

∴ $١٠٩٠ = ن(٤٦ + ٦٣) \Leftarrow ن = ١٠$ بالتعويض فى (١) ∴ $ء = ٧$

∴ $(ح_{ن}) = (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ....)$

(ب) $أ = ١٧$ ، $١٧ + (ن - ١)ء = -٩٥$ ∴ $(ن - ١)ء = -١١٢$ .... (١)

، $-٥٨٥ = \frac{ن}{٢}[٣٤ + (-١١٢)]$ ∴ $-١١٧٠ = ن \times (-٧٨)$ ∴ $ن = ١٥$

ومن (١) ∴ $١٤ء = -١١٢$ ∴ $ء = -٨$ ∴ $(ح_{ن}) = (١٧ ، ٩ ، ١ ، ....)$

(٥) بدأ كريم العمل براتب سنوى قدره ١٩٢٠٠ جنيه ، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيهاً ، فكم يكون مجموع ما يحصل عليه من رواتب فى نهاية السنة العاشرة .

الحل

رواتب كريم السنوية تتبع متتابعة حسابية : $أ = ١٩٢٠٠$ ، $ء = ٤٨٠$

$جـ_{١٠} = ٥(٢ \times ١٩٢٠٠ + ٩ \times ٤٨٠) = ٢١٣٦٠٠$ جنيه

أو : $ح_{ن} = أ + (ن - ١)ء = ١٩٢٠٠ + (ن - ١) \times ٤٨٠ = ٤٨٠ن + ١٨٧٢٠$

∴ $جـ_{١٠} = \sum_{ن=١}^{١٠}(٤٨٠ن + ١٨٧٢٠) = ٢١٣٦٠٠$ جنيه

تمارين (٣)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التى تبدأ بالعدد ١ وتنتهى بالعدد ٢٠ تساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ٢١ (ج) ٢١٠ (ء) ٤٢٠

(٢) مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (ج) ٩٠ (ء) ١١٠

(٣) مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (ج) ٣٠٠ (ء) ٤٠٠

(٤) مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى ....

(أ) ٢٤٣ (ب) ٨١ (ج) ٢٧ (ء) ٨٠٠

(٥) مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٨ هو ....

(أ) ٩٠ (ب) ١٨٠ (ج) ٢٠ (ء) ١٠

(٦) $\sum_{ك=١}^{٥}(٢ك + ١) =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (ء) ٣٥

(٧) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٤}(٢ر + ١)$ يساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (ج) ٣٥ (ء) ٢٤

(٨) صيغة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ن - ١)

باستخدام رمز التجميع هى :

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن}(٥ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن}(٥ر - ١)$

(ج) $\sum_{ر=١}^{ن}(٥ر + ١)$ (ء) $\sum_{ر=١}^{٥ن-١}(٣ر + ١)$

(٩) صيغة المتسلسلة : ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤}(٥ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٤}(٤ر + ٣)$

(ج) $\sum_{ر=١}^{٤}(٧ر + ١)$ (ء) $\sum_{ر=١}^{٤}(٣ر + ٤)$

(١٠) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨}(٢ر + ١)$ يساوى ....

(أ) ٦٤ (ب) ٧٢ (ج) ٧٦ (ء) ٨٠

(١١) مجموع ٢٥ حداً الأولى من حدود المتتابعة $(ح_{ن}) = ٣ - ٢ن$ يساوى ....

(أ) ٦٥٠ (ب) ٦٠٠ (ج) -٥٧٥ (ء) -٦٠٠

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) أوجد :

(أ) $\sum_{م=٧}^{٣٢}(١٢ - ٥م)$

(ب) ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢

(ج) ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣

(ء) ٣ + ٦ + ٩ + ... إلى ١٥ حداً الأولى منها ثم أوجد مجموعها ابتداءً من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر .

(٢) أوجد مجموع :

(أ) العشرة حدود الأولى من م . ح : (١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ....)

(ب) حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، .... ، ٨٠)

(جـ) الخمسة عشر حداً الأولى من متتابعة حسابية فيها :

$ح_{١٢}$ = ٣٨ ، $ح_{٣٥}$ = ٢٤٥

(٣) إذا كان : $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = ٢ فى متتابعة حسابية ، وكان الحد الأول فيها = ٦ فأوجد المتتابعة ، ثم أوجد مجموع العشرة حدود الأولى ابتداءً من الحد الأول .

(٤) فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ....) أوجد :

(أ) مجموع ٢٠ حداً الأولى منها .

(ب) مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداءً من الحد السابع .

(جـ) مجموع حدود المتتابعة بدءاً من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$

(٥) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ....) إبتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها مساوياً ٤٠٠

(٦) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ....) إبتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع .

(٧) كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الحسابية (– ١٦ ، – ١٤ ، – ١٢ ، ....) ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها صفراً

(٨) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها :

(أ) $ح_{١}$ = ٢٣ ، $ح_{ن}$ = ٨٦ ، $جـ_{ن}$ = ٥٤٥

(ب) $ح_{١}$ = ١٧ ، $ح_{ن}$ = – ٩٥ ، $جـ_{ن}$ = – ٥٨٥

(٩) أدخل ثمانية أوساط حسابية بين العددين ٢ ، ٢٩ ثم أوجد مجموع تلك الأوساط .

(١٠) متتابعة حسابية فيها مجموع الحدين التاسع عشر والعشرين يساوى ١٤٤ ، مجموع الحدين العشرين والحادى والعشرين يساوى ١٥٢ أوجد :

(أ) الحد العشرين .

(ب) عدد الحدود اللازم أخذه من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ١٦٠ .

حدد هدفك

ليهون تعبك

الوحدة الأولى :

٤ ـ المتتابعة الهندسية

- **تعريف** : تسمى المتتابعة ($ح_{ن}$) حيث $ح_{ن} \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = مقدار ثابت لكل ن ∈ $ص^{+}$ ، ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ونرمز له بالرمز (ر) .

أى أن : ر = $\frac{\text{أى حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

- **التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية** :

المتتابعة الهندسية يمثلها بيانياً نقط منفصلة من منحنى دالة أسية

- **الحد العام (النونى) للمتتابعة الهندسية** :

$ح_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$ حيث ن رتبة الحد

وإذا كان (ل) هو الحد الأخير فى المتتابعة الهندسية فإن :

$ل = أ \times ر^{ن-١}$ حيث ن = عدد حدود المتتابعة

- **الصورة العامة للمتتابعة الهندسية** :

(أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$ ، أ $ر^{٣}$ ، أ $ر^{٤}$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^{٢}}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

- **تعيين المتتابعة الهندسية** :

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية إذا عُلم أ ، ر ولذلك نحتاج لمعادلتين نحلهما (بطريقة التحليل ثم القسمة) .

- **من المفيد تذكر قوانين التحليل الآتية** :

(١) فرق المربعين : $١ - ر^{٢} = (١ - ر)(١ + ر)$

(٢) فرق المكعبين : $١ - ر^{٣} = (١ - ر)(١ + ر + ر^{٢})$

(٣) مجموع المكعبين : $١ + ر^{٣} = (١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})$

(٤) $١ + ر^{٢} + ر^{٤} = (١ - ر + ر^{٢})(١ + ر + ر^{٢})$

الأوساط الهندسية

- **تعريف** : إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تسمى الوسط الهندسى بين العددين أ ، جـ

حيث : $ب^{٢} = أ \times جـ \Leftarrow ب = \pm \sqrt{أ جـ}$

- **ملحوظة** :

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى . أى أنه إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين ، أ ≠ ب فإن : $\frac{أ+ب}{٢} > \sqrt{أ ب}$

- **إدخال عدد محدود من الأوساط الهندسية بين عددين** :

(١) نوجد عدد حدود المتتابعة (ن) = عدد الأوساط + ٢

(٢) العددين المعلومين هما $أ$ ، $ح_ن$ ثم نحسب ($ر$) من قانون الحد العام $ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

(٣) تكون الأوساط هى ($أر ، أر^٢ ، أر^٣$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$)

أو ($-أر ، أر^٢ ، -أر^٣$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $-\frac{ل}{ر}$)

- **ملحوظة هامة :**

الوسط الأول = $ح_٢ = أ + ء$ ، الوسط السابع = $ح_٨ = أ + ٧ء$

، الوسط الأخير = ل − ء ، الوسط قبل الأخير = ل − ٢ء وهكذا

حاول أن تحل

(١) بين أياً من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها فى حال كونها هندسية :

(أ) $(ح_ن)$ = (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ٣)

(ب) $(ح_ن) = (\frac{١}{٢٤٣} ، \frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣})$

(ج) $(ح_ن) = (٥ \times ٢^ن)$

(ء) $(ح_ن) = (٣ (ن + ١)^٢)$

الحل

(أ) متتابعة هندسية ، $ر = \frac{١}{٢}$

(ب) متتابعة هندسية ، $ر = ٣$

(ج) متتابعة هندسية ، $ر = \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٥ \times ٢^{ن+١}}{٥ \times ٢^ن} = ٢$

(ء) ليست متتابعة هندسية لأن $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣(ن+٢)^٢}{٣(ن+١)^٢} \neq$ مقدار ثابت

<u>تفكير ناقد</u> : هل يمكن أن يكون أساس المتتابعة الهندسية مساوياً للصفر أو مساوياً للواحد الصحيح ؟ فسّر إجابتك .

الحل

عندما $ر = ٠$ لا يمكن أن توجد متتابعة هندسية

عندما $ر = ١$ توجد متتابعة هندسية ثابتة (حدودها جميعاً هى نفس العدد)

وتمثل بيانياً بخط مستقيم // محور السينات .

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية :

$(\frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣}$ ، ....) .

الحل

$ر = \frac{١}{٣} \div \frac{١}{٩} = ٣$ ∴ المتتابعة هى : $(\frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ....)

(٣) أثبت أن المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع .

الحل

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٣^{ن+١-٥}}{٢ \times ٣^{ن-٥}} = ٣^{ن-٤-ن+٥} = ٣$ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية : $ح_٧ = ٢ \times ٣^{٧-٥} = ٢ \times ٣^٢ = ١٨$

<u>تعبير شفهى</u> :

ماذا تتوقع إذا كانت قوة الأساس $ر$ عدداً زوجياً ؟ فسّر إجابتك .

الحل

إذا كانت قوة الأساس زوجية فإن للقيمة $ر$ إجابتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة بمعنى : عندما $ر^٤ = ١٦ \Leftarrow ر^٤ = (\pm ٢)^٤$ ∴ $ر = \pm ٢$

(٤) $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_٣ = ١٢$ ، $ح_٨ = ٣٨٤$.

أوجد هذه المتتابعة .

الحل

$ح_٣ = ١٢ \Leftarrow أر^٢ = ١٢$ .... (١) ، $ح_٨ = ٣٨٤ \Leftarrow أر^٧ = ٣٨٤$ .... (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) : ∴ $\frac{أر^٧}{أر^٢} = \frac{٣٨٤}{١٢} \Leftarrow ر^٥ = ٣٢ = ٢^٥$ ∴ $ر = ٢$

بالتعويض فى (١) ∴ $أ \times ٤ = ١٢$ ∴ $أ = ٣$ ∴ $(ح_ن)$ = (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

(٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الثانى ٦ ، حدها العاشر ١٥٣٦ . أوجد المتتابعة .

الحل

$ح_٢ = ٦ \Leftarrow أر = ٦$ .... (١) ، $ح_{١٠} = ١٥٣٦ \Leftarrow أر^٩ = ١٥٣٦$ .... (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) : ∴ $\frac{أر^٩}{أر} = \frac{١٥٣٦}{٦}$ ∴ $ر^٨ = ٢٥٦ = (\pm ٢)^٨$ ∴ $ر = \pm ٣$

∴ $(ح_ن)$ = (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) أ، $(ح_ن)$ = (−٣ ، ٦ ، −١٢ ، ٢٤ ، ....)

(٦) يمارس كمال رياضة المشى سيراً على الأقدام لتجديد لياقته البدنية وإنقاص وزنه الزائد ، فإذا قطع فى اليوم الأول مسافة ٥٠ متراً ، وكان يقطع فى كل يوم تال ضعف المسافة التى يقطعها فى اليوم السابق مباشرة .

(أ) اكتب متتابعة المسافات التى يقطعها يومياً .

(ب) أوجد المسافة التى يقطعها فى اليوم السابع .

الحل

المسافات التى يقطعها كمال تتبع متتابعة هندسية : (٥٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ....)

$ح_ن = ٥٠ \times ٢^{ن-١}$ ∴ $ح_٧ = أ ر^٦ = ٥٠ \times ٢^٦ = ٣٢٠٠$ متر

(٧) أدخل ستة أوساط هندسية بين : $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

الحل

$أ = \frac{١}{٤}$ ، $ح_ن = ٣٢$ ، عدد الحدود = ٦ + ٢ = ٨ ∴ $ح_٨ = ٣٢ \Leftarrow أر^٧ = ٣٢$

∴ $ر^٧ = ٣٢ \Leftarrow ر^٧ = ٤ \times ٣٢ = ٢^٧$ ∴ $ر = ٢$

∴ الأوساط هى : (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

تفكير ناقد : ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين حقيقيين موجبين متساويين ؟

الحل

بفرض ٩ ، ٩ عددين حقيقيين موجبين :

∴ الوسط الحسابى لهما = $\frac{٩ + ٩}{٢}$ = ٩ ، الوسط الهندسى لهما = $\sqrt{٩ \times ٩}$ = ٩

⇐ الوسط الحسابى = الوسط الهندسى الموجب لعددين متساويين .

(٨) عددان موجبان وسطهما الحسابى يساوى ٢٥ ، ووسطهما الهندسى يساوى ٢٠ ، أوجد العددين .

الحل

بفرض العددين : ٩ ، ب ∴ ٩ + ب = ٢ × ٢٥ = ٥٠ ⇐ ب = ٥٠ − ٩ ...... (١)

، $\sqrt{٩ب}$ = ٢٠ ⇐ ٩ب = ٤٠٠ .... (٢) وبالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ٩ (٥٠ − ٩) = ٤٠٠ ⇐ $٩^٢$ − ٥٠٩ + ٤٠٠ = ٠ ∴ ٩ = ٤٠ أ، ٩ = ١٠

ومن (١) : ∴ ب = ١٠ أ، ب = ٤٠ ⇐ العددان هما : ٤٠ ، ١٠

(٩) إذا أُدخلت عدة أوساط هندسية بين : ٢ ، ١٤٥٨ ، وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ٢٧ فأوجد عدد تلك الأوساط .

الحل

٩ = ٢ ، ل = ١٢٥٨

مجموع الوسطين الأولين = ٩ر + $٩ر^٢$ = ٢ر + $٢ر^٢$ = ٢ر (١ + ر)

مجموع الوسطين الأخيرين = $\frac{ل}{ر} + \frac{ل}{ر^٢} = \frac{لر + ل}{ر^٢} = \frac{ل(ر+١)}{ر^٢} = \frac{١٤٥٨(ر+١)}{ر^٢}$

∴ ٢ر (ر + ١) ÷ $\frac{١٤٥٨(ر+١)}{ر^٢} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $\frac{٢ر(ر+١) \times ر^٢}{١٤٥٨(ر+١)} = \frac{١}{٢٧}$

∴ $\frac{ر^٣}{٢٧}$ = ١ ∴ $ر^٣$ = ٢٧ ∴ ر = ٣ ، ١٤٥٨ = ٢ × $٣^{ن-١}$

⇐ ٧٢٩ = $٣^{ن-١}$ ∴ $٣^٦ = ٣^{ن-١}$ ⇐ ن − ١ = ٦ ∴ ن = ٧

∴ عدد الأوساط = ن − ٢ = ٧ − ٢ = ٥ أوساط

تمارين (٤)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الحد السابع من المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....) هو

(٩) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (ى) ٢

(٢) الحد السادس من م . هـ ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ......) هو ....

(٩) $\frac{١}{٣}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (ى) ٩

(٣) الحد الخامس من المتتابعة ($ح_ن$) = ٢ × $(٣)^{ن-١}$ يساوى ...

(٩) ٦ (ب) ٤٨٦ (جـ) ١٦٢ (ى) ٨١

(٤) الحد النونى لـ م . هـ (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ....) هو

(٩) ٣ $(٢)^{ن-١}$ (ب) ٣ $(-٢)^{ن-١}$

(جـ) −٣ $(٢)^{ن-١}$ (ى) ٣ $(-٢)^{ر-١}$

(٥) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

(٩) ٨ (ب) ± ٨ (جـ) − ٨ (ى) ± ٦٤

(٦) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص = ...

(٩) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (ى) ٢٢٥

(٧) إذا كانت ٩ ، ب، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب = ...

(٩) $\sqrt{٩جـ}$ (ب) ± $\sqrt{٩جـ}$ (جـ) $(٩جـ)^٢$ (ى) ٩جـ

(٨) الحد الخامس من م . هـ (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ....) هو

(٩) $\frac{٢٧}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (ى) $\frac{٨١}{٣٢}$

(٩) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى :

(٩) ($ح_ن$) = ($٤ن^٢$) لكل ن ⩾ ١

(ب) ($ح_ن$) = ($\frac{١}{٤}$ × $ح_{ن-١}$) لكل ن ⩾ ٢

(جـ) ($ح_ن$) = ($٢^ن$ − ١) لكل ن ⩾ ١

(ى) ($ح_ن$) = (لو (٣ × $٢^ن$)) لكل ن ⩾ ١

(١٠) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) هو ....

(٩) ٢ + $٢^{ن+١}$ (ب) $٢^ن$

(جـ) $٢^{ن-١}$ (ى) $٢^{ن+١}$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

أولاً : مسائل على الحد النونى وتكوين المتتابعة الهندسية :

(١) فى المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ....) أوجد :

(٩) حدها العاشر

(ب) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية فى كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

(٩) (٨ ، ٤ ، ٢ ، ......) (ب) ($\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ....)

(٣) بيّن أى المتتابعات الآتية هندسية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة هندسية :

(٩) ($ح_ن$) = (٥ × $٢^ن$)

(ب) ($ح_ن$) = (٣ $(ن + ١)^٢$)

(ج) (ح ن) : $ح_1 = ١٢$ ، $ح_ن = \frac{1}{4} \times ح_{ن-1}$ ، ن > ١

(٤) أثبت أن المتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع .

(٥) بيّن أن المتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = (٢)^ن$ هى متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن ورتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨ .

(٦) فى كلا مما يأتى أوجد :

(أ) متتابعة هندسية حدها الأول ٩ ، وحدها السادس ٢٨٨

(ب) متتابعة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الثالث ٢٤

(ج) متتابعة هندسية ($ح_ن$) فيها $ح_٣ = ١٢$ ، $ح_٨ = ٣٨٤$

(د) متتابعة هندسية حدها الثالث ١٨ ، حدها السادس ٤٨٦

ثانياً : مسائل على الأوساط الهندسية :

(٧) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣

(٨) عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسى ٣ فما العددان .

(٩) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣

(١٠) أدخل ٥ أوساط هندسية بين : ٤ ، ٢٩١٦

(١١) أدخل سبعة أوساط هندسية موجبة بين : $\frac{٨١}{١٦}$ ، $\frac{١٦}{٨١}$

(١٢) إذا كونت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فأوجد قيمتى : س ، ص

(١٣) إذا كانت (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى ، (١ ، ص ، س) فى تتابع هندسى فاحسب قيمة كل من : س ، ص حيث : س ≠ ص ≠ ١

الوحدة الأولى :

٥ ـ المتسلسلات الهندسية

- تعريف : المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية .

مجموع ن حداً الأولى من متسلسلة هندسية

أولاً : بمعلومية حدها الأول (أ) والأساس (ر) :

$$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} \quad ، ر \neq ١$$

ثانياً : بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) :

$$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} \quad ، ر \neq ١$$

ثالثاً : العلاقة بين $ح_ن$ ، $جـ_ن$:

$$ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-1} \quad \text{لكل } ن > ١$$

ويستخدم هذا القانون لمعرفة قيمة أى حد من حدود المتتابعة (حسابية أو هندسية) إذا عُلم قانون مجموعها بدلالة ن .

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

- تعريف : المسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود .

مثل : $أ + أر + أر^٢ + ... + أر^{ر-1} + ... = \sum_{ر=1}^{\infty} أر^{ر-1}$

- ملاحظات :

(١) المتابعة الهندسية الغير منتهية التقاربية : هى المتتابعة التى يمكن إيجاد مجموعها (مجموعها عدداً حقيقياً) إذا كان : $|ر| < ١$

(٢) المتابعة الهندسية الغير منتهية الغير تقاربية : هى المتتابعة التى لا يمكن إيجاد مجموعها . إذا كان : $|ر| > ١$

مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

$$جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$$

حاول أن تحل

تفكير ناقد : ما قيمة المجموع عندما ر = ١ ؟

الحل

عندما ر = ١ فإن : $جـ_ن = ن أ$

(١) أوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين اللتين فيهما :

(أ) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦

(ب) أ = ١٠٠٠ ، ر = $\frac{1}{2}$ ، ن = ١٠

الحل

(أ) ∵ $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ لأن ر > ١ ∴ $جـ_٦ = \frac{٤(٣^٦ - ١)}{٣ - ١} = ١٤٥٦$

(ب) ∵ $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ لأن ر < ١

∴ $جـ_{١٠} = \frac{١٠٠٠\left[١ - \left(\frac{1}{2}\right)^{١٠}\right]}{١ - \frac{1}{2}} = \frac{١٢٧٨٧٥}{٦٤}$

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التى فيها :

أ = ٢٠٤٨ ، ر = $\frac{1}{2}$ ، ل = ٢٨

الحل

$ج_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٢٠٤٨ - ٢٨ \times ٠,٥}{١ - ٠,٥} = ٤٠٦٨$

(٣) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين :

(أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{ر-١}$

(ب) $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$

الحل

$\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{ر-١}$: أ = $ح_٧ = (٢)^٦ = ٨$ ، ر = ٢ ، ن = ١٦ − ٧ + ١ = ١٠

∴ $ج_{١٠} = \frac{٨(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٨١٨٤$

حل آخر : أ = ٨ ، ل = $ح_{١٦} = \frac{١}{٨} \times ٢^{١٥} = ٤٠٩٦$

∴ $ج_ن = \frac{٤٠٩٦ \times ٢ - ٨}{٢ - ١} = ٨١٨٤$

(٤) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ٢٤٣ وحدها الأخير ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤ .

الحل

أ = ٢٤٣ ، ل = ١ ، $ج_ن = ٣٦٤$

∴ $٣٦٤ = \frac{٢٤٣ - ر}{١ - ر}$ ∴ ٣٦٤ − ٣٦٤ ر = ٢٤٣ − ر ∴ ١٢١ = ٣٦٣ ر

∴ ر = $\frac{١}{٣}$ ∴ المتتابعة هى : (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ....)

(٥) إذا تضاعفت زراعة البكتريا كل يوم (فى إحدى عينات البحوث الطبية) ، فكم يكون عدد البكتريا بعد عشرة ايام إذا كان عددها فى اليوم الأول ٨٠٠ .

الحل

التضاعف يشكل متتابعة هندسية : (٨٠٠ ، ١٦٠٠ ، ٣٢٠٠ ، ....)

حيث : أ = ٨٠٠ ، ر = ٢ ، ن = ١٠

∴ $ج_{١٠} = \frac{٨٠٠(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٨١٨٤٠٠$ بكتريا

(٦) أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها ؟ فسر إجابتك .

(أ) ٧ + ٢١ + ٦٣ + ...

(ب) $\frac{٨١}{٨} + \frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} +$ ....

الحل

(أ) ر = ٣ ⇐ |ر| > ١ ∴ لا يمكن إيجاد مجموع للمتسلسلة.

(ب) ر = $\frac{٢٧}{٤} \div \frac{٨١}{٨} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائى من حدود هذه المتسلسلة .

تفكير ناقد : هل يمكنك إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما |ر| ⩾ ١ ؟ فسر إجابتك .

الحل

لا يمكن جمع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما |ر| ⩾ ١ لأن المجموع فى هذه الحالة يكون لا محدود وغير معرفاً .

(٧) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد

(أ) ١٢ − ٢٤ + ٤٨ − ٩٦ + ...

(ب) $\frac{٧}{٥} + \frac{٢١}{١٠} + \frac{٦٣}{٢٠} +$ ....

الحل

(أ) ر = −٢ ⇐ |ر| = ٢ > ١ وبالتالى لا يمكن إيجاد مجموع للمتسلسلة

(ب) ر = $\frac{٢١}{١٠} \div \frac{٧}{٥} = \frac{٣}{٢}$ ⇐ |ر| > ١

∴ لا يمكن إيجاد مجموع للمتسلسلة

فكر وناقش : أراد زياد نقل صندوق فى اتجاه حائط يبعد عنه مسافة ٢٠ متر على عدة مراحل بحيث تبلغ المسافة التى ينقل إليها الصندوق تساوى نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة فهل يستطيع زياد أن يصل إلى الحائط ؟

الحل

لن يستطيع زياد أن يصل إلى الحائط ابداً لأن حركة زياد تتبع متسلسلة هندسية لا نهائية (١٠ + ٥ + ٢,٥ + ١,٢٥ + ...) والتى مجموعها يقترب من ٢٠ متراً فى اللانهاية .

(٨) أوجد : $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦\left(\frac{٣}{٤}\right)^{ر-١}$

الحل

∵ ر = $\frac{٣}{٤}$ ∴ |ر| < ١ ∴ يمكن جمع المتسلسلة إلى ∞ حيث أ = ٥٦

∴ $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}} = ٢٢٤$

(٩) تم دحرجة كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى ، فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ متراً ثم بدأت تقطع ٦٠ ٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة . أوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف .

الحل

دحرجة الكرة تتبع متتابعة هندسية لا نهائية : (٢٥ ، ١٥ ، ٩ ، ....)

أ = ٢٥ ، ر = $\frac{٦٠}{١٠٠} = ٠,٦$

∴ $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٥}{١ - ٠,٦} = ٦٢,٥$ متر

تمارين (٥)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ١ ، ر = ٢ يساوى ....

(أ) ٣٢ (ب) ٣١ (جـ) ٣٠ (د) ٢٩

(٢) متتابعة هندسية مجموع ن حداً الأولى منها يعطى بالعلاقة : $جـ_ن = ٣^ن - ١$ فإن الحد الخامس منها يساوى ....

(أ) ١٦٢ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٨١ (د) ٧٢٩

(٣) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (٤ ، ٢ ، ١ ، ....)

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(٤) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٤}$ هو ٤ فإن حدها الأول يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٦) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية له إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

أولاً : مسائل على مجموع المتتابعة الهندسية :

(١) أوجد مجموع كلاً من المتتابعات الهندسية التى فيها :

(أ) أ = ٢٠٤٨ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ل = ١٢٨

(ب) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦

(٢) أوجد مجموع كلاً من المتتابعات الهندسية الآتية :

(أ) (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، ....) إلى ٦ حدود

(ب) (٣ ، –٦ ، ١٢ ، .... ، ٧٦٨)

(٣) أوجد :

(أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨} (٢)^{ر-١}$ (ب) $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦ (\frac{١}{٢})^{ر-١}$

(٤) كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١

(٥) أثبت أن : المتتابعة $(ح_ن) = (١٠ \times ٢^{ن-٢})$ هى متتابعة هندسية ، وأوجد عدد الحدود ابتداءً من الحد الأول التى يجب أخذها من المتتابعة ليكون مجموعها ٢٥٥٥

(٦) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وكان $ح_١ = ١٢$ ، $ح_٤ = ٢ ح_٣$ أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها .

(٧) $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$. أوجد المتتابعة ومجموع الأثنى عشر حداً الأولى منها .

(٨) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان :

$ح_١ + ح_٢ = ٤٨$ ، $ح_٣ + ح_٤ = ١٩٢$

(أ) اكتب هذه المتتابعة

(ب) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها .

(٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها مجموع الأربعة حدود الأولى منها = ٦٠ ، مجموع الأربعة حدود التالية لها = ٩٦٠ . أوجد هذه المتتابعة ، ثم أوجد مجموع سبعة حدود من حدودها ابتداءً من حدها الثالث .

ثانياً : مسائل على مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية :

(١٠) أى من المتتابعات الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن :

(أ) (–٦ ، –١٢ ، –٢٤ ، ....)

(ب) $(ح_ن) = (٥ \times ٢^ن)$ (جـ) $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{١-ن})$

(د) $(ح_ن) = (٣^{-٣-ن})$ (هـ) ($٢ ، \sqrt{٢} ، ١$ ، ....)

(١١) أوجد :

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦ (\frac{٣}{٤})^{ر-١}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤٢ (\frac{٦}{٧})^{ر-١}$

(١٢) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منته = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$ ، فما مجموعها ؟

(١٣) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥

(١٤) متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى مالانهاية ، ومجموع حديها الأول والثانى = ٩ . أوجد هذه المتتابعة .

(١٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة غير منتهية ، مجموع حديها

الأول والثانى ٣٦ ومربع حدها الثالث ٣٦ . أوجد المتابعة ثم أوجد مجموعها ابتداءً من الحد الأول .

(١٦) اكتب ثلاث متتابعات هندسية الحد الأول لكل منها ١٦ بحيث تكون الأولى تزايدية والثانية تناقصية والثالثة ثابتة . ثم أوجد مجموع إحدى هذه المتتابعات إلى مالانهاية .

الوحدة الثانية : التباديل والتوافيق

١ – مبدأ العد

- تعريف : إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_١$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_٢$ طريقة وهكذا ..... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معاً = $م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times .... \times م_ن$

حاول أن تحل

(١) إذا طلب منك إرتداء قميص وبنطلون من بين ٢ قميص و ٣ بنطلون . فكم عدد طرق الاختيار .

الحل

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طرق

(٢) مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطات ، ٣ أنواع من المشروبات . كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يومياً على أن تشمل الوجبة نوعاً واحداً من كل من الفطائر والسلاطات والمشروبات ؟

الحل

عدد الطرق = ٦ × ٤ × ٣ = ٧٢

(٣) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } ، بحيث يكون رقم العشرات زوجياً .

الحل

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٢

عدد طرق اختيار رقم الألوف = ٣

عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١

عدد الطرق الممكنة = ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ١٢

تمارين (٦)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى :

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤

(جـ) ٤ × ٤ (د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام { ٥ ، ٣ ، ٠ ، ٢ } يساوى ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٤ × ٢ (جـ) ٣ × ٣ (د) ٣ × ٤

(٣) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ } تساوى ....

(أ) ٨ × ٦ × ٣ (ب) ٤ × ٣ × ٣

(جـ) ٤ × ٣ × ٢ (د) ٢ × ٣ × ١

(٤) لجنة مؤلفة من ١٢ عضواً ، فإن عدد طرق اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

(٥) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٢٤

(٦) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٧) عدد طرق تكوين العدد ٥٤٧٦ من الأعداد ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ هو ..

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ١ (د) صفر

(٨) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٥ أرقام غير الصفر هو ....

(أ) ٥ × ٤ × ٣ (ب) ٥ + ٤ + ٣

(جـ) ٥ × ٥ × ٥ (د) ٣ × ٢ × ١

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (على – عمرو – عاطف) وطالبة من بين طالبتين (علا – عبير) .

(٢) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة { ٢ ، ٣ ، ٥ }

(٣) كم عدداً مكوناً من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } .

(٤) كم عدد الأعداد المكونة كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام { ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٩ } بحيث تكون أصغر من ٩٠٠

(٥) كم عدداً زوجياً مكوناً من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

(٦) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ } بحيث يكون رقم الآحاد ٦

(٧) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } بحيث يكون رقم العشرات زوجياً .

الوحدة الثانية :

٢ ـ مضروب العدد – التباديل

n SHIFT × r = – n SHIFT x^{-1} =

• تعريف : مضروب العدد الصحيح الموجب :

|ن = ن (ن – ١) (ن – ٢) × .... × ٣ × ٢ × ١

• التباديل : لتكن س مجموعة عدد عناصرها ن فإن كل ترتيب عدد عناصره ر يمكن تكوينه من المجموعة س يسمى تبديلاً ، حيث ٠ ≤ ر ≤ ن ، ونرمز لها بالرمز ${}^{ن}ل_{ر}$ (تقرأ ن لام ر) ، ر ، ن ∈ ص$^{+}$. حيث :

${}^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن – ١) (ن – ٢) .... (ن – ر + ١)

• ملاحظات هامة :

(١) |٠ = ١ ، |١ = ١

(٢) إذا كان |ن = ١ فإن ن = صفر أو ن = ١ .

(٣) |ن = ن |ن – ١

(٤) مضروب أى عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أى عدد صحيح موجب أقل منه ، فمثلاً :
|١٢ / |١٠ = ١٢ × ١١ × |١٠ / |١٠ = ١٣٢

(٥) عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد = |ن

(٦) عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى دائرة = |ن – ١

(٧) تحليل المضروب : يستعمل لمعرفة أصل العدد الذى مضروبة = قيمة معلومة : فمثلاً إذا كان : |ن = ١٢٠ نبدأ بقسمة ١٢٠ ÷ ٢ ثم نقسم الناتج ÷ ٣ ثم على ٤ وهكذا إلى أن نصل إلى العدد ١.

١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

فيكون |ن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = |٥ ⇐ ن = ٥

(٨) إذا علم أن : ${}^{ن}ل_{٣}$ = ٦٠ لمعرفة قيمة ن نوجد الجذر التكعيبى للعدد ٦٠ ونأخذ العدد الصحيح الأعلى للعدد الناتج ويكون هو العدد الأوسط . $\sqrt[3]{٦٠}$ = ٣,٩١٥ تقريباً ∴ ${}^{ن}ل_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ${}^{٥}ل_{٣}$ ⇐ ن = ٥

(٩) إذا عُلم أن : ${}^{ن}ل_{٤}$ = ١٢٠ لمعرفة ن نوجد الجذر الرابع للعدد ١٢٠ ونأخذالعددين الصحيحين الأكبر والأصغر من العدد الناتج ويكونا هما العددان الأوسطان .
$\sqrt[4]{١٢٠}$ = ٣,٠٣٩٧٥ فنأخذ العددين ٤ × ٣ أوسطان
∴ ${}^{ن}ل_{٤}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ${}^{٥}ل_{٤}$ ⇐ ن = ٥

(١٠) تحليل التبديلة : إذا عُلم أن ${}^{٩}ل_{ر}$ = ٣٠٢٤ لمعرفة ر نبدأ بقسمة العدد ٣٠٢٤ ÷ ٩ ثم نقسم الناتج على ٨ وهكذا إلى أن نصل للعدد ١
∴ ${}^{٩}ل_{ر}$ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ${}^{٩}ل_{٤}$ ⇐ ر = ٤

حاول أن تحل

(١) أوجد : (أ) |١٥ / |١٢ (ب) |٧ / |٥ + |٩ / |٧

الحل

(أ) |١٥ / |١٢ = ١٥ × ١٤ × ١٣ × |١٢ / |١٢ = ٢٧٣٠

(ب) |٩ / |٧ + |٧ / |٥ = ٩ × ٨ × |٧ / |٧ + ٧ × ٦ × |٥ / |٥ = ٧ × ٦ + ٩ × ٨ = ١١٤

(٢) إذا كان : ١ / |ن + ٢ / |ن + ١ = ٥٦ / |ن + ٢ فأوجد قيمة ن .

الحل

١ / |ن + ٢ / (ن + ١) |ن = ٥٦ / (ن + ٢) (ن + ١) |ن

بالضرب × (ن + ٢) (ن + ١) |ن

⇐ (ن + ٢) (ن + ١) + ٢ (ن + ٢) = ٥٦

∴ ن^{٢} + ٣ن + ٢ + ٢ن + ٤ = ٥٦ ∴ ن^{٢} + ٥ن – ٥٠ = ٠ ⇐ ن = ٥

تفكير ناقد : إذا كان |أ = |٠ فما قيمة أ .

الحل

⇐ أ = ٠ ، أ = ١

(٣) احسب قيمة كل من :

(أ) ${}^{٥}ل_{٢}$ + ${}^{٦}ل_{٣}$ (ب) ${}^{٥}ل_{٥}$ / ${}^{٥}ل_{٤}$

الحل

(أ) ١٤٠

(ب) ١ وذلك باستخدام الآلة الحاسبة

(٤) كم يبلغ عدد الكلمات التى يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية .

الحل

عدد جميع حروف الأبجدية = ٢٨ حرف

∴ عدد الكلمات المطلوبة = $^{٢٨}ل_{٥}$ = ١١٧٩٣٦٠٠

تفكير ناقد : هل يمكنك استنتاج عدد طرق ترتيب ن من الأشخاص فى دائرة ؟

الحل

عدد التباديل المختلفة = $^{ن}ل_{ن}$ = $\lfloor ن$ وذلك فى وضع الترتيب فى صف (أى نعلم نقطة البداية) أما الترتيب على شكل دائرة (دون نقطة مرجع ثابتة نبدأ منها) فهو يساوى $\frac{\lfloor ن}{ن} = \lfloor ن-١$

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٩ اشخاص فى تسعة مقاعد على شكل دائرة .

الحل

عدد الطرق = $\frac{\lfloor ٩}{٩} = \lfloor ٨$ = ٤٠٣٢٠

(٦) إذا كان $^{٩}ل_{ر-١}$ = ٥٠٤ فأوجد قيمة $\lfloor ر+١$

الحل

٥٠٤ = ٩ × ٨ × ٧ (تحليل التبديلة) .

∴ $^{٩}ل_{ر-١} = {}^{٩}ل_{٣}$ ⇐ ر − ١ = ٣ ∴ ر = ٤ ∴ $\lfloor ر+١ = \lfloor ٥$ = ١٢٠

تفكير ناقد : أوجد قيمة كلاً من : $^{٧}ل_{٧}$ ، $\lfloor ٧$ ماذا تلاحظ ؟

الحل

$^{٧}ل_{٧} = \lfloor ٧$ = ٥٠٤٠ ⇐ $^{ن}ل_{ن} = \lfloor ن$

تمارين (٧)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان $\lfloor ن$ = ٢٤ فإن ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٤ (ء) ٣

(٢) إذا كان ن $\lfloor ٢ن-١$ = ١٢ فإن ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ١٢ (ء) ٢٤

(٣) إذا كان $\frac{١}{\lfloor ن} = \frac{٢}{\lfloor ن+١}$ فإن ن = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (ء) ٣

(٤) إذا كان $\lfloor ن-٥$ = ١ فإن ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) { ٥ ، ٦ } (ء) ١

(٥) إذا كان $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ فإن ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (ء) ٥

(٦) إذا كان $^{ن}ل_{٣}$ = ١٢٠ فإن قيمة ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٤ (ء) ٣

(٧) إذا كانت س = { س : س ∈ ط ، ١ ⩽ س ⩽ ٥ } ، وكانت ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب } فإن عدد عناصر ص = ...

(أ) ٧ (ب) ١٠ (ج) ٢٠ (ء) ٢٥

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) أوجد :

(أ) عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد .

(ب) عدد طرق ترتيب ٩ أشخاص فى تسعة مقاعد على شكل دائرة .

(ج) عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص .

(٢) إذا كان : س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

(أ) كم عدداً مكوناً من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟

(ب) كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟

(ج) كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟

(ء) كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟

(هـ) كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟

(٣) من مجموعة الحروف { أ ، ب، ج ، ء ، هـ ، و } أوجد :

(أ) عدد طرق اختيار حرف واحد .

(ب) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين مع مراعاة الترتيب .

(٤) إذا كان : م + ن = ١١ ، $^{م-ن}ل_{م}$ = ٤٢ فأوجد قيمة $^{م}ل_{ن}$

(٥) إذا كان $^{ن}ل_{ر}$ = ٢٥٢٠ ، $\lfloor ر$ = ١٢٠ فأوجد قيمة $\lfloor ٣ر-٢ن$

(٦) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ل}_{١٥} > {}^{\text{ن}}\text{ل}_{١٤}$ فأوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق هذه المتباينة .

(٧) تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر . كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات الترخيص

الوحدة الثانية :

٣ ـ التوافيق (nCr)

n | SHIFT | ÷ | r | =

- <u>التوافيق</u> : لتكن س مجموعة عدد عناصرها ن فإن كل اختيار عدد عناصره ر حيث $٠ \leqslant \text{ر} \leqslant \text{ن}$ يمكن أخذه من عناصر المجموعة س دون مراعاة للترتيب يسمى توفيقاً ونرمز له بالرمز $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (تقرأ ن قاف ر) ، ر ، ن $\in$ ص$^{+}$. حيث :

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+١)}{\text{ر}(\text{ر}-١)(\text{ر}-٢)\ldots\ldots\times ٣\times ٢\times ١}$$

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}$$

- <u>نتائج هامة</u> :

(١) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$

(٢) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$ (قانون التبسيط) .

(٣) $^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = ١$

(٤) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فإن :

س = ص أ، س + ص = ن

- <u>ملاحظات هامة</u> :

(١) عدد جميع القطع المستقيمة التى يمكن تكوينها من ن من النقاط = $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}$

، عدد المثلثات التى يمكن تكوينها = $^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}$

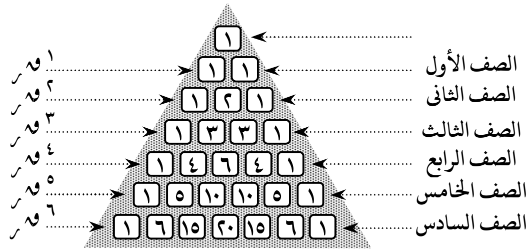
، عدد أقطار الشكل الهندسى الذى عدد أضلاعه ن ضلع = $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} - \text{ن}$

(٢) كل من : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ هو عدد صحيح موجب .

(٣) التبديل يكون بدون تكرار مع مراعاة الترتيب أما التوافيق تكون بدون تكرار وبلا ترتيب .

(٤) يستخدم قانون التبسيط إذا كانت $\text{ر} > \frac{١}{٢}\text{ن}$

- <u>**مثلث باسكال**</u> :



- <u>ملاحظات على مثلث باسكال</u> :

(١) الأعداد على طرفى المثلث كلها الواحد الصحيح لأن $^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = ١$

(٢) بقية الأعداد : كل عدد يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه .

(٣) الصف الأول : ن = ١ ، ر = ٠ ، ١

الصف الثانى : ن = ٢ ، ر = ٠ ، ١ ، ٢

الصف الثالث : ن = ٣ ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ وهكذا ....

(٤) مجموع أعداد كل صف :

الصف الأول = $(١ + ١)^{١}$ ، الصف الثانى = $(١ + ١)^{٢}$

الصف الثالث = $(١ + ١)^{٣}$ ، الصف الرابع = $(١ + ١)^{٤}$

الصف الخامس = $(١ + ١)^{٥}$ ، ...... وهكذا

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة : $^{١٢}\text{ق}_{٩} : {}^{١٧}\text{ق}_{١٤}$ بدون استخدام الحاسبة .

الحل

$$\frac{^{١٢}\text{ق}_{٩}}{^{١٧}\text{ق}_{١٤}} = \frac{\underline{|١٢}}{\underline{|٩}\ \underline{|٣}} \div \frac{\underline{|١٧}}{\underline{|١٤}\ \underline{|٣}} = \frac{\underline{|١٢}}{\underline{|٩}\ \underline{|٣}} \times \frac{١٤\times١٣\times١٢\times١١\times١٠\ \underline{|٩}\ \underline{|٣}}{١٧\times١٦\times١٥\times١٤\times١٣\ \underline{|١٢}}$$

$$= \frac{١١}{٣٤}$$

(٢) إذا كانت : $^{٢٨}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{٢٨}\text{ق}_{٢\text{ر}-٥}$ فأوجد قيمة ر .

الحل

إما $٢\text{ر} - ٥ = \text{ر} \Leftarrow \text{ر} = ٥$ أ، $\text{ر} + ٢\text{ر} - ٥ = ٢٨ \Leftarrow \text{ر} = ١١$

(٣) أشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين . أوجد عدد مباريات المسابقة .

الحل

عدد مباريات المسابقة = $^{٧}\text{ق}_{٢}$ = ٢١ مباراة

<u>تفكير ناقد</u> : بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و ٥ سيدات ؟

الحل

عدد الطرق = $^6ن_4 + ^5ن_3 = 25$ طريقة

(٤) فصل دراسى به ١٠ طلاب ، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف ؟

الحل

عدد الطرق = $^{10}ن_3 \times ^8ن_2 = 3360$ طريقة

تطبيق على النشاط (مثلث باسكال) : أثبت أن :

$^5ن_0 + ^5ن_1 + ^5ن_2 + ^5ن_3 + ^5ن_4 + ^5ن_5 = 2^5$

الحل

من مثلث باسكال ومن الصف الخامس تحديداً :

الطرف الأيمن = ١ + ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣٢ = 2^5 = الطرف الأيسر

أو: من الصف الخامس : الطرف الأيمن = $(1+1)^5 = 2^5$ = الطرف الأيسر

نشاط : أوجد عدد أقطار الأشكال الآتية :

الشكل السداسى ، الشكل الثمانى ، شكل هندسى ذو عشرة اضلاع .

الحل

عدد أقطار الشكل السداسى = $^6ق_2 - 6 = 9$

، عدد أقطار الشكل الثمانى = $^8ق_2 - 8 = 20$

، عدد أقطار الشكل الهندسى ذو عشرة الأضلاع = $^{10}ق_2 - 10 = 35$

تمارين (٨)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) عدد طرق اختيار ٣ اشخاص من ٥ اشخاص يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٥

(٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ اسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى ....

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٠

(٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ٨ (جـ) ٦٠ (د) ٢

(٤) إذا كان $^نن_{10} > ^نن_9$ فإن ن ....

(أ) = ١٩ (ب) < ١٩ (جـ) > ١٩ (د) ⩾ ١٩

(٥) إذا كان : $^4ن_0 + ^4ن_1 + ^4ن_2 + ^4ن_3 + ^4ن_4 = 2^ن$ فإن ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(٦) ٥ نقط فى مستوى لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من هذه النقط = ...

(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٧) إذا كان $^نن_ر = ل$ فإن ل ∈ ....

(أ) ص (ب) $ص^+$ (جـ) ع (د) ط

(٨) إذا كان $^نن_{10} = ^نن_{14}$ فإن $^{25}ن_ن$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

(٩) إذا كان $^8ل_{ر+1} = 336$ فإن $^{2ر}ن_4$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

(١٠) إذا كان $\lfloor 3ن - 7 = 120$ فإن $^نن_{ن-1}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٧

(١١) إذا كان $^نن_3 = 120$ فإن $^نن_{ن-9}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٣ (د) ١٠

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) أوجد قيمة ن فى كلا مما يأتى :

(أ) إذا كان $^{ن+1}ن_4 = \frac{5}{2}\ ^نن_3$

(ب) إذا كان $^نن_3 = \frac{1}{3}\ 30ن$

(جـ) إذا كان $^نن_{ن-2} = 28$

(د) إذا كان $^نن_{2ن-21} = ^نن_3$

(٢) إذا كان $^نل_{ر-1} = 6720$ ، $^نن_{ر-1} = 56$

أوجد قيمة كل من ن ، ر .

(٣) إذا كان $^{ن-م}ل_3 = 210$ ، $^{ن+م}ن_4 = 715$

أوجد قيمة كل من ن ، م .

(٤) إذا كان $^نل_ر = 120 \times ^نن_{ن-ر}$ فما قيمة ر ؟

(٥) بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية ؟

(٦) إذا كانت : س = { -٣ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

، ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب }

، ع = { { أ ، ب ، جـ } : أ ، ب ، جـ ∈ س } أوجد عدد عناصر كل من ص ، ع .

الوحدة الثالثة : التفاضل والتكامل

١ – معدل التغير

- **دالة التغير** : ت (هـ) = د (س$_{1}$ + هـ) – د (س$_{1}$)

حيث هـ = ∆ س = مقدار التغير فى س = س$_{2}$ – س$_{1}$

التغير فى ص : ∆ ص = د (س$_{2}$) – د (س$_{1}$)

- **دالة متوسط التغير** : م (هـ) = $\frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د(س}_1\text{+هـ) – د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$

متوسط التغير : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د(س}_2\text{) – د(س}_1\text{)}}{\text{س}_2\text{ – س}_1}$

- **دالة معدل التغير** = نهـــا$_{\text{هـ}\leftarrow 0}$ م (هـ) = نهـــا$_{\text{هـ}\leftarrow 0}$ $\frac{\text{د(س}_1\text{+هـ) – د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$

نستنتج معدل التغير بالتعويض عن قيمة س فى دالة معدل التغير

- **ملحوظة** :

فى المسائل اللفظية نفرض المتغير المطلوب معدل التغير بالنسبة له بالرمز س

فمثلاً : لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للطول فإننا نفرض أن الطول = س .

ولإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للعرض فإننا نفرض أن العرض = س .

- **تذكر أن** :

(١) المستطيل :

مساحته = الطول × العرض ، محيطه = (الطول + العرض) × ٢

(٢) المربع :

مساحته = (طول ضلعه)^{2} ، محيطه = طول الضلع × ٤

(٣) الدائرة :

مساحتها = π نق^{2} ، محيطها = ٢ π نق

(٤) المكعب :

حجم المكعب = (طول حرفه)^{3}

مساحته الجانبية = ٤ × (طول حرفه)^{2}

مساحته الكلية = ٦ × (طول حرفه)^{2}

(٥) الكرة :

حجم الكرة = π نق^{3} ، مساحتها السطحية = ٤ π نق^{2}

الثقة بالنفس ... نصف النجاح

حاول أن تحل

(١) إذا كانت د (س) = س^{2} – س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب :

(أ) ت (٠,٢)   (ب) ت (– ٠,٣)

الحل

∵ د (س) = س^{2} – س + ١ ∴ د (٣) = ٩ – ٣ + ١ = ٧

، د (٣ + هـ) = (٣ + هـ)^{2} – (٣ + هـ) + ١ = هـ^{2} + ٦ هـ + ٩ – ٣ – هـ + ١

= هـ^{2} + ٥ هـ + ٧ ⇐ ت (هـ) = د (٣ + هـ) – د (٣) = هـ^{2} + ٥ هـ

(أ) ت (٠,٢) = (٠,٢)^{2} + ٥ (٠,٢) = ١,٠٤

(ب) ت (–٠,٣) = (–٠,٣)^{2} + ٥ (–٠,٣) = –١,٤١

(٢) إذا كانت د (س) = س^{2} + ٣ س – ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م (٠,٢)

(ب) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣ .

الحل

∵ د (س) = س^{2} + ٣ س – ١

(أ) عند س = ٢ ∴ د (٢) = ٤ + ٦ – ١ = ٩

، د (٢ + هـ) = (٢ + هـ)^{2} + ٣ (٢ + هـ) – ١ = هـ^{2} + ٤ هـ + ٤ + ٦ + ٣ هـ – ١

= هـ^{2} + ٧ هـ + ٩ ∴ ت (هـ) = د (٢ + هـ) – د (٢) = هـ^{2} + ٧ هـ

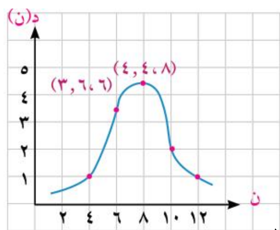
∴ م (هـ) = نهـــا$_{\text{هـ}\leftarrow 0}$ $\frac{\text{د(٢+هـ) – د(٢)}}{\text{هـ}}$ = هـ + ٧ ، م (٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢

(ب) س$_{1}$ = ٤,٥ ، س$_{2}$ = ٣ ∴ ∆ س = س$_{2}$ – س$_{1}$ = ٣ – ٤,٥ = –١,٥

، ∆ ص = د (٣) – د (٤,٥) = [٩ + ٩ – ١] – [٢٠,٢٥ + ١٣,٥ – ١] = –١٥,٧٥

⇐ متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{-15.75}{-1.5}$ = ١٠,٥

(٣) يوضح الشكل المقابل المنحنى ر = د (ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدراً بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدراً بالشهور.



أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

(أ) ن = ٤ إلى ن = ٦

(ب) ن = ٦ إلى ن = ١٠

(ج) ن = ٤ إلى ن = ١٢

الحل

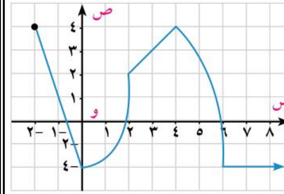
متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ر}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{د(ن}_2\text{) – د(ن}_1\text{)}}{\text{ن}_2\text{ – ن}_1}$

(أ) متوسط التغير = $\frac{\text{د(٦) – د(٤)}}{6-4} = \frac{3.6-1}{2}$ = ١,٣

(ب) متوسط التغير = $\frac{\text{د(١٠) – د(٦)}}{10-6} = \frac{2-3.6}{4}$ = –٠,٤

(جـ) متوسط التغير = $\frac{د(١٢) - د(٤)}{١٢ - ٤} = \frac{١ - ١}{٨}$ = صفر

تفكير ناقد : يوضح الشكل المقابل الدالة د حيث ص = د (س) .
حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتاً ، وفسّر إجابتك .



الحل

متوسط التغير = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ويكون ثابتاً لأى مستقيم .

أى أن متوسط التغير يكون ثابتاً فى الفترات :]−٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[

(٤) أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$
عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ ثم استنتج معدل التغير فى د عند س = ٥

الحل

∵ د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ ∴ ت (هـ) = $\frac{٣}{س + هـ - ٢} - \frac{٣}{س - ٢}$

∴ ت (هـ) = $\frac{٣س_١ - ٦ - ٣س_١ - ٣هـ + ٦}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$

∴ م (هـ) = $\frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{-٣}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$

∴ معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) = $\frac{-٣}{(س_١ - ٢)^٢}$

، عند س = $س_١$ = ٥ ∴ معدل التغير = $\frac{-٣}{(-٣)^٢} = \frac{-١}{٣}$

(٥) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ إلى ٤ سم ، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم .

الحل

نفرض طول ضلع الصفيحة = س ، ومساحتها = مـ ∴ مـ = د (س) = $س^٢$

∵ دالة متوسط التغير = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

∴ م (هـ) = $\frac{(س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢}{هـ}$ = ٢ $س_١$ + هـ

عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٤ ⇐ س = ٣ ، هـ = ٣,٤ − ٣ = ٠,٤

∴ م (٠,٤) = ٢ × ٣ + ٠,٤ = ٦,٤

، دالة معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٢ $س_١$ + هـ) = ٢ $س_١$

، عند س = $س_١$ = ٥ ∴ معدل التغير فى مساحة الصفيحة = ٢ × ٥ = ١٠

وما توفيقى إلا بالله

تمارين (٩)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى ....
(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

(٢) إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦ فإن د (٤) تساوى ....
(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....
(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(٤) متوسط تغير الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٣ س + ٥ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ....
(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) إذا كانت د (س) = $س^٢$ − س + ١ أوجد دالة التغير ت عند س = ٣ ثم أوجد ت (٠,٢) ، ت (−٠,٣)

(٢) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ٣ س − ١ فأوجد :
(أ) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ، ثم أوجد م (٠,٢)
(ب) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

(٣) أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث :
د (س) = $س^٢$ − ٢ س + ٣ ومن ذلك أوجد :
(أ) متوسط التغير عندما تتغير س من −٢ إلى −١,٩
(ب) معدل التغير لهذه الدالة عندما س = ٣

(٤) أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ ومن ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عند س = $\sqrt{٣}$

(٥) أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س + ٣}$
عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ ومنها أوجد :
(أ) متوسط التغير عندما تتغير س من ٦ إلى ٦,٦١
(ب) معدل التغير فى الدالة عندما س = ٢٢

(٦) مكعب يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله ، احسب متوسط التغير فى مساحة أوجه المكعب الكلية بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٦ إلى ٦,٣ سم ، ثم احسب

معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه ٨ سم

(٧) كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروى فأوجد معدل التغير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧ سم .

الوحدة الثالثة :

٢ – الاشتقاق

• **ميل المماس** لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) عند النقطة ($\text{س}_١$ ، د ($\text{س}_١$)) يساوى معدل التغير فى د عند س = $\text{س}_١$ وهو يساوى ظل الزاوية التى يصنعها المماس مع محور السينات الموجب

• **تعريف الدالة المشتقة** :

إذا كانت د :]أ ، ب[⟵ ح ، س ∈]أ ، ب[فإن الدالة المشتقة

د′ : د′ (س) = $\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$ بشرط أن تكون هذه النهاية لها وجود .

• **رموز الدالة المشتقة** (**المشتقة الأولى للدالة**) :

إذا كانت ص = د (س) فإن المشتقة الأولى للدالة د هى :

ص′ أ، د′ وتقرأ مشتقة ص أ، مشتقة د

وكذلك $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ وتقرأ دال ص دال س (دون نطق كلمة على) أو مشتقة ص بالنسبة لـ س .

• **قابلية الدالة للاشتقاق** :

يقال أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (بشرط أ ∈ المجال) إذا وفقط إذا كانت د′ (أ) لها وجود حيث :

$$\text{د}'(\text{أ}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د(أ+هـ)} - \text{د(أ)}}{\text{هـ}}$$

حاول أن تحل

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = $\text{س}^٣$ − ٤ عند النقطة أ (١ ، −٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة باستخدام تعريف المشتقة .

الحل

نثبت أولاً أن النقطة أ تقع على المنحنى : د (١) = $(١)^٣$ − ٤ = −٣

∴ النقطة (١ ، −٣) ∈ منحنى الدالة د

ولإيجاد قياس الزاوية نوجد معدل التغير فى الدالة عند هذه النقطة وهنا سوف نستخدم التعريف : معدل التغير فى الدالة د عند (١ ، −٣)

$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د(١+هـ)} - \text{د(١)}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{(١+\text{هـ})^٣ - ٤ - (-٣)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{(١+\text{هـ})^٣ - (١)^٣}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{(١+\text{هـ})^٣ - (١)^٣}{(١+\text{هـ}) - (١)} = ٣\,(١)^٢ = ٣$

∴ ميل المماس عند أ = ٣ = ظا ل ⟸ ل = $\text{ظا}^{-١}$ (٣) = ٣٤′ ٧١°

(٢) إذا كانت د (س) = ٣ $\text{س}^٢$ + ٤ س + ٧ فاوجد مشتقة الدالة د مستخدماً تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (−١ ، ٦) .

الحل

د (س) = ٣ $\text{س}^٢$ + ٤ س + ٧ ∴ د (س+هـ) = ٣ $(\text{س+هـ})^٢$ + ٤ (س+هـ) + ٧

د (س+هـ) = ٣ $\text{س}^٢$ + ٦ س هـ + ٣ $\text{هـ}^٢$ + ٤ س + ٤ هـ + ٧

بالطرح : ∴ د (س+هـ) − د (س) = ٦ س هـ + ٣ $\text{هـ}^٢$ + ٤ هـ

∴ م(هـ) = ٦ س + ٣ هـ + ٤ ∴ د′(س) = ٦ س + ٤

ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٦) = د′(−١) = ٦ (−١) + ٤ = −٢

(٣) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث :

د (س) = $\sqrt{\text{س} + ٥}$

الحل

د (س) = $\sqrt{\text{س}+٥}$ ∴ د (س+هـ) = $\sqrt{\text{س+هـ}+٥}$

$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س+هـ}+٥} - \sqrt{\text{س}+٥}}{\text{هـ}}$

وبالضرب × مرافق البسط ∴ $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{س+هـ}+٥-\text{س}-٥}{\text{هـ}\left(\sqrt{\text{س+هـ}+٥} + \sqrt{\text{س}+٥}\right)}$

$= \frac{١}{\sqrt{\text{س+هـ}+٥} + \sqrt{\text{س}+٥}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+٥}}$ ∴ د قابلة للاشتقاق عند س > −٥

تمارين (١٠)

(١) أوجد الدالة المشتقة للدالة د (باستخدام تعريف المشتقة) لكل مما يأتى :

(أ) د (س) = ٥ س + ٢ (ب) د (س) = ٣ $\text{س}^٢$

(٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة د فى كل مما يأتى وعيّن قيم س التى تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق :

(أ) د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ (ب) د (س) = $\frac{٣}{٢\text{س} - ٥}$

(٣) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ $\text{س}^٢$ − ٨ عند النقطة أ (٢ ، ٤) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(٤) إذا كانت د (س) = أ $\text{س}^٢$ + ب حيث أ ، ب ثابتان أوجد :

(أ) المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص) .

(ب) قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢ ، −٣) الواقعة عليه يساوى ١٢ .

الوحدة الثالثة :

٣ – قواعد الاشتقاق

(١) **مشتقة الدالة الثابتة** :

إذا كانت : د (س) = ﺃ حيث ﺃ ثابت فإن :

د/ (س) = صفر

(٢) **مشتقة الدالة د (س) = س^ن** :

إذا كانت : د (س) = س^ن حيث ن ∈ ح فإن :

د/ (س) = ن س^(ن − ١)

وإذا كانت : د (س) = ﺃ س^ن حيث ﺃ ثابت ، ن ∈ ح فإن :

د/ (س) = ﺃ ن س^(ن − ١)

وإذا كانت د (س) = س فإن د/ (س) = ١

(٣) **مشتقة مجموع (أو الفرق بين) دالتين** :

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن :

$\frac{ءص}{ءس}$ = د/ (س) ± ر/ (س)

(٤) **مشتقة حاصل ضرب دالتين** :

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) × ر (س) فإن :

$\frac{ءص}{ءس}$ = د (س) × ر/ (س) + ر (س) × د/ (س)

أى أن : المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى .

(٥) **مشتقة خارج قسمة دالتين** :

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر (س) ≠ ٠ فإن :

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ر(س)×د/(س) − د(س)×ر/(س)}{[ر(س)]^2}$

أى أن المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق

= $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

- **مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)** :

إذا كانت ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، وكانت ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص = د (ر (س)) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

ويكون : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

- **مشتقة الدالة [د (س)]^ن** :

إذا كانت ص = [د (س)]^ن حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ن [د (س)]^(ن − ١) × د/ (س)

أى أن : مشتقة (قوس)^ن = ن × (القوس)^(ن − ١) × مشتقة مابداخل القوس .

- **نتيجة** : إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$\frac{ء}{ءس}$ (ص^ن) = ن ص^(ن − ١) × $\frac{ءص}{ءس}$

- **ملحوظة** : إذا كانت : ص = √د (س) فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{د/(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

أى أن : مشتقة الجذر التربيعى لدالة

= $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{\text{٢× الجذر}}$

تطبيقات على المشتقة الأولى للدالة

- **أولاً** : **طرق معرفة ميل المماس** :

(ﺃ) إذا كان المماس يمر بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

فإن : م = $\frac{ص_٢ − ص_١}{س_٢ − س_١}$

أى أن : ميل المماس = فرق الصادات على فرق السينات

(ب) إذا كان قياس الزاوية التى يصنعها المماس مع محور السينات الموجب يساوى ل فإن : م = ظا ل

أى أن : ميل المماس = ظل الزاوية ل

(جـ) إذا كان المماس يوازى محور السينات فإن : م = $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

(ء) إذا كان المماس يوازى محور الصادات (أى عمودى على محور السينات) فإن : ميل المماس = غير معرف

∴ مقام الكسر الممثل للميل = صفر

(هـ) إذا كان المماس يوازى المستقيم ﺃ س + ب ص + جـ = ٠ فإن :

ميل المماس = ميل المستقيم = $\frac{−ب}{ﺃ}$ = $\frac{−\text{ معامل س}}{\text{معامل ص}}$

(و) إذا كان المماس عمودى على المستقيم ﺃ س + ب ص + جـ = ٠ فإن : ميل المماس = − مقلوب ميل المستقيم

- **ملاحظة** :

لمعرفة ميل المستقيم ﺃ س + ب ص + جـ = ٠ هناك أكثر من طريقة :

(١) ميل المستقيم = − $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

(٢) ميل المستقيم = المشتقة الأولى لمعادلة المستقيم

(٣) نضع معادلة المستقيم على الصورة : ص = ﺃ س + جـ

فيكون ميل المستقيم = معامل س = ﺃ

- **ثانياً : معادلة المماس للمنحنى بمعلومية ميله ونقطة التماس** **$(س_{١} ، ص_{١})$ هى** :

$ص - ص_{١} = م \, (س - س_{١})$

- **ثالثاً : معادلة العمودى على المنحنى بمعلومية الميل ونقطة التماس $(س_{١} ، ص_{١})$ هى** :

$ص - ص_{١} = - \frac{١}{م} \, (س - س_{١})$

- **ملاحظات** :

(١) لمعرفة نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونحسب قيم س .
(٢) لمعرفة نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونحسب قيم ص .
(٣) ميل المستقيم يكون موجباً إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .
(٤) ميل المستقيم يكون سالباً إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

(أ) $ص = س^{٧}$ (ب) $ص = س^{١٠}$
(ج) $ص = س^{\frac{٣}{٢}}$ (ء) $ص = س^{-٤}$
(هـ) $ص = س^{-\frac{٥}{٣}}$ (و) $ص = \frac{١}{س^{٥}}$
(ز) $ص = \sqrt{س^{٩}}$ (ح) $ص = \sqrt[٣]{س^{٧}}$
(ط) $ص = ٣ س^{٦}$ (ى) $ص = -٢ س^{-٥}$
(ك) $ص = \pi س^{-٤}$ (ل) $ص = -٤ \sqrt[٣]{س}$

الحل

(أ) $٧ س^{٦}$ (ب) $١٠ س^{٩}$ (ج) $\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$
(ء) $-٤ س^{-٥}$ (هـ) $-\frac{٥}{٣} س^{-\frac{٨}{٣}}$
(و) $ص = س^{-٥}$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = -٥ س^{-٦} = \frac{-٥}{س^{٦}}$
(ز) $ص = س^{\frac{٩}{٢}}$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٩}{٢} س^{\frac{٧}{٢}} = \frac{٩}{٢} \sqrt{س^{٧}}$
(ح) $ص = س^{\frac{٧}{٣}}$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٧}{٣} س^{\frac{٤}{٣}} = \frac{٧}{٣} \sqrt[٣]{س^{٤}}$
(ط) $١٨ س^{٥}$ (ي) $١٠ س^{-٦}$ (ك) $-٤ \pi س^{-٥}$
(ل) $ص = -٤ س^{\frac{١}{٣}}$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = -٤ \times \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{-٤}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

(٢) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان :

(أ) $ص = ٣ س^{٢} + ٥$
(ب) $ص = ٢ س^{٣} - ٤ س + ٧$
(ج) $ص = ٣ س^{-٤} + ٦ س^{\frac{٢}{٣}}$
(ء) $ص = ٧ س^{٤} - \frac{١}{٤س}$
(هـ) $ص = ٣ س^{٨} - ٢ س^{-٥} + ٨$
(و) $ص = \frac{٥}{س} + س \sqrt{س} - ٤$

الحل

(أ) $٦ س$
(ب) $٦ س^{٢} - ٤$
(ج) $\frac{ءص}{ءس} = -١٢ س^{-٥} + ٦ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}} = -١٢ س^{-٥} + ٤ س^{\frac{-١}{٣}}$
(ء) $ص = ٧ س^{٤} - س^{-١}$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ٢٨ س^{٣} - (-١) س^{-٢} = ٢٨ س^{٣} + \frac{١}{س^{٢}}$
(هـ) $٢٤ س^{٧} + ١٠ س^{-٦}$
(و) $ص = ٥ س^{-١} + س \times س^{\frac{١}{٢}} - ٤ = ٥ س^{-١} + س^{\frac{٣}{٢}} - ٤$
$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = -٥ س^{-٢} + \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} = \frac{-٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{٢} \sqrt{س}$

(٣) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان :

(أ) $ص = (٢ س + ٣)(٣ س - ١)$
(ب) $ص = (٢ س + ٥)^{٢}$
(ج) $ص = \sqrt{س} \, (\sqrt{س} + ٤)$
(ء) $ص = (\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)$
(هـ) $ص = (٤ س^{٢} - ١)(٧ س^{٣} + س)$ ثم أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $س = ١$

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = ٢ (٣ س - ١) + ٣ (٢ س + ٣) = ٦ س - ٢ + ٦ س + ٩$
$= ١٢ س + ٧$
(ب) $\frac{ءص}{ءس} = ٢ (٢ س + ٥) \times ٢ = ٨ س + ٢٠$
(ج) $ص = س + ٤ س^{\frac{١}{٢}}$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ١ + ٤ \times \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{س}}$
(ء) $ص = س - ١$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ١$
(هـ) $\frac{ءص}{ءس} = (٤ س^{٢} - ١)(٢١ س^{٢} + ١) + (٧ س^{٣} + س)(٨ س)$
، عندما $س = ١$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ \times ٢٢ + ٨ \times ٨ = ١٣٠$

(٤) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان :

(أ) $ص = \frac{٢ س - ١}{س + ١}$
(ب) $ص = \frac{٢ س + ٥}{٤ س - ١}$
(ج) $ص = \frac{٢ س^{٢} - ١}{س + ٥}$

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س+١)\times ٢ - (٢س-١)\times ١}{(س+١)^{٢}} = \frac{٣}{(س+١)^{٢}}$

(ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(١-٤س)\times ٢ - (٢س+٥)\times(-٤)}{(١-٤س)^{٢}} = \frac{٢٢}{(١-٤س)^{٢}}$

(جـ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س+٥)\times ٤س - (٢س^{٢}-١)\times ١}{(س+٥)^{٢}} = \frac{٢س^{٢}+٢٠+١}{(س+٥)^{٢}}$

(٥) إذا كانت : $ص = (٢س+٣)^{٥}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٥(٢س+٣)^{٤}\times ٢ = ١٠(٢س+٣)^{٤}$

(٦) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت :

(أ) $ص = (٢س^{٣} - ٤س + ١)^{٩}$

(ب) $ص = \left(\frac{٥س^{٢}}{٣س^{٢}+٢}\right)^{٣}$

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = ٩(٢س^{٣}-٤س+١)^{٨}(٦س^{٢}-٤)$

$= ١٨(٣س^{٢}-٤)(٢س^{٣}-٤س+١)^{٨}$

(ب) $\frac{ءص}{ءس} = ٣\left(\frac{٥س^{٢}}{٣س^{٢}+٢}\right)^{٢}\times\frac{(٣س^{٢}+٢)\times ١٠س - ٥س^{٢}\times ٦س}{(٣س^{٢}+٢)^{٢}}$

$= ٣\times\frac{٢٥س^{٤}}{(٣س^{٢}+٢)^{٢}}\times\frac{٢٠س}{(٣س^{٢}+٢)^{٢}} = \frac{١٥٠٠س^{٥}}{(٣س^{٢}+٢)^{٤}}$

(٧) أوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٧$ فى كل مما يأتى :

(أ) $د(س) = س^{٣} - ٥س + ٢$

(ب) $د(س) = (س-٥)^{٧}$

الحل

(أ) $د'(س) = ٣س^{٢}-٥ \quad \therefore ٣س^{٢}-٥ = ٧ \quad \therefore ٣س^{٢} = ١٢ \quad \therefore س^{٢} = ٤$

$\therefore س = \pm ٢$

(ب) $د'(س) = ٧(س-٥)^{٦} = ٧ \quad \therefore (س-٥)^{٦} = ١ \quad \therefore س-٥ = \pm ١$

$\therefore س = \pm ١ + ٥ \Leftarrow س = ٦$ أ، $س = ٤$

<u>تفكير ناقد</u> : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت :

$ص = (س-١)(س+١)(س^{٢}+١)(س^{٤}+١)(س^{٨}+١)\times(س^{١٦}+١)$

الحل

$ص = (س^{٢}-١)(س^{٢}+١)(س^{٤}+١)(س^{٨}+١)(س^{١٦}+١)$

$= (س^{٤}-١)(س^{٤}+١)(س^{٨}+١)(س^{١٦}+١)$

$= (س^{٨}-١)(س^{٨}+١)(س^{١٦}+١) = (س^{١٦}-١)(س^{١٦}+١) = س^{٣٢}-١$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣٢س^{٣١}$

(٨) أوجد ميل كل من المماس والعمودى للمنحنيات الآتية عند النقط المبينة :

(أ) $ص = س - ٧$ عندما $س = -١$

(ب) $ص = س + \frac{١}{س}$ عندما $س = ٤$

(جـ) $ص = \frac{٥}{س-٣}$ عندما $س = ٢$

(ء) $ص = (س^{٣}-٢)(س+١)$ عندما $س = ١$

الحل

(أ) $ص' = ١ \Leftarrow$ ميل المماس $= ١ \Leftarrow$ ميل العمودى $= -١$

(ب) $ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، عند $س = ٤$

$\therefore$ ميل المماس $= ١ - \frac{١}{١٦} = \frac{١٥}{١٦}$ $\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{١٦}{١٥}$

(جـ) $ص' = \frac{-٥}{(س-٣)^{٢}}$

، عند $س = ٢$ $\therefore$ ميل المماس $= -٥$ ، ميل العمودى $= \frac{١}{٥}$

(ء) $ص' = (س^{٣}+١)\times ١ + (س+١)\times ٣س^{٢}$

، عند $س = ١$ $\therefore$ ميل المماس $= ٥$ ، ميل العمودى $= -\frac{١}{٥}$

(٩) أوجد النقط التى تقع على المنحنى $ص = س^{٣} - ٣س^{٢}$ ويكون عندها المماس للمنحنى :

(أ) موازياً محور السينات .

(ب) عمودى على المستقيم : $س + ٩ص + ٣ = ٠$

الحل

$ص = س^{٣} - ٣س^{٢}$ .... (١) $\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} - ٦س$

(أ) $\because$ المماس // محور السينات $\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٠ \quad \therefore ٣س(س-٢) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أ، $س = ٢$ وبالتعويض فى (١) $\therefore ص = ٠$ أ، $ص = -٤$

$\therefore$ النقط هى : $(٠ ، ٠)$ ، $(٢ ، -٤)$

(ب) $\because$ المماس $\perp$ المستقيم $س + ٩ص + ٣ = ٠$

$\therefore$ ميل المماس $\times$ ميل المستقيم $= -١ \quad \therefore (٣س^{٢}-٦س)\times\frac{-١}{٩} = -١$

$\therefore ٣س^{٢}-٦س = ٩ \quad \therefore ٣س^{٢}-٦س-٩ = ٠ \Leftarrow س = ٣$ أ، $س = -١$

وبالتعويض فى (١) $\therefore ص = ٠$ أ، $ص = -٤$

$\therefore$ النقط هى : $(٣ ، ٠)$ ، $(-١ ، -٤)$

(١٠) أوجد معادلتا المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها :

(أ) $ص = س^{٣} + س^{٢} - ١$ ، $س = -٢$

(ب) $ص = (٣س-٥)^{٧}$ ، $س = ٢$

الحل

(أ) عند $س = -٢$ $\therefore ص = (-٢)^{٣} + (-٢)^{٢} - ١ = -٥$

$\therefore$ نقطة التماس هى $(-٢ ، -٥)$

، $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢س$ ، عند $س = -٢$

$\therefore$ ميل المماس $= ٣(-٢)^{٢} + ٢(-٢) = ٨$

معادلة المماس هى : $ص + ٥ = ٨(س+٢)$ أى : $٨س - ص + ١١ = ٠$

معادلة العمودى هى : $ص + ٥ = \frac{-١}{٨}(س+٢)$ بالضرب $\times ٨$

$\therefore$ ٨ ص + ٤٠ = − س − ٢ أي : س + ٨ ص + ٤٢ = ٠

(ب) عند س = ٢ $\therefore$ ص = $(٦ - ٥)^{٧}$ = ١ $\therefore$ نقطة التماس هي : (٢ ، ١)

، $\frac{دص}{دس}$ = ٢١ $(٣ س - ٥)^{٦}$ ، عند س = ٢ $\therefore$ ميل المماس = ٢١ $(٦ - ٥)^{٦}$ = ٢١

معادلة المماس هي : ص − ١ = ٢١ (س − ٢) أي : ٢١ س − ص − ٤١ = ٠

معادلة العمودي هي : ص − ١ = $\frac{-١}{٢١}$ (س − ٢) بالضرب × ٢١

$\therefore$ ٢١ ص − ٢١ = − س + ٢ أي : س + ٢١ ص − ٢٣ = ٠

(١١) أوجد قيمة كل من الثابتين ﺃ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = $س^{٢}$ + ﺃ س + ب عند النقطة (١ ، ٣) الواقعة عليه يساوي ٥ .

الحل

$\because$ ص = $س^{٢}$ + ﺃ س + ب $\therefore$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س + ﺃ

، $\because$ $\frac{دص}{دس}$ = ٥ عند س = ١ $\therefore$ ٢ × ١ + ﺃ = ٥ $\Leftarrow$ ﺃ = ٣

، $\because$ النقطة (١ ، ٣) $\in$ المنحنى فهي تحقق معادلته

$\therefore$ ٣ = ١ + ٣ × ١ + ب $\Leftarrow$ ب = −١

تمارين (١١)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) معدل تغير $س^{٣}$ + ٤ بالنسبة إلى س عندما س = ٢ يساوي ..

(ﺃ) ٤ (ب) ٨ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) ١٢

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = ٣ س − $س^{٣}$ عند س = ٠ يساوي ....

(ﺃ) ٣ (ب) صفر (ج) −٣ (د) ٦

(٣) المماس للمنحنى ص = $س^{٢}$ − ٨ س + ٢ يوازي محور السينات عند س = ...

(ﺃ) −٨ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) صفر

(٤) المستقيم س + ص = ٥ يمس المنحنى ص = ٣ $س^{٢}$ + ٥ س + ١ عند س = ...

(ﺃ) ١ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) −١

(٥) قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى ص = $س^{٢}$ − ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوي ....

(ﺃ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (ج) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(٦) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $(٢ س - ٣)^{٥}$ عند س = ٢

(ﺃ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (ج) ٥ (د) ١٠

(٧) ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ عندما س = ١ يساوي ...

(ﺃ) صفر (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

أولاً : أسئلة على قواعد الاشتقاق :

(١) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(ﺃ) ص = ٣ $س^{٦}$ (ب) ص = π $س^{-٤}$

(ج) ص = $\frac{٣}{٢ س^{٢}}$ (د) ص = ٤ $\sqrt{س}$

(هـ) ص = س $\sqrt{س}$ (و) ص = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$

(٢) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(ﺃ) ص = ٥ $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ − ٤ س + ٧

(ب) ص = ٢ $س^{٦}$ + $س^{-٩}$

(ج) ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٤}$ − $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ + ٧ س − ٩

(د) ص = ٢ $س^{٣}$ − $\frac{٣}{س}$ − $\frac{١}{س^{٢}}$ + ٥

(هـ) ص = س (٣ $س^{٢}$ − ٢ س) + ١٢ س

(٣) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(ﺃ) ص = ٢ $س^{٦}$ + ٣ $\sqrt{س}$ (ب) ص = $\frac{\sqrt{س} - ٢ س}{\sqrt{س}}$

(ج) ص = ($س^{٢}$ + ١) ($س^{٣}$ + ٣) عند س = −١

(د) ص = ($س^{٢}$ − $\sqrt{س}$) ($س^{٢}$ + ٢ $\sqrt{س}$)

(هـ) ص = $\frac{٢ س + ٥}{٤ س - ١}$ (و) ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$

(٤) أوجد :

(ﺃ) $\frac{د}{دس}$ (٥ π) (ب) $\frac{د}{دس}$ ($\sqrt{٢}$ $س^{٧}$ − $\frac{س^{٥}}{٥}$ + π)

(٥) إذا كانت د (س) = ﺃ $س^{٢}$ + ب س ، وكانت د (١) = ٢ ، د′ (١) = صفر فما قيمة كل من : ﺃ ، ب .

ثانياً : أسئلة على مشتقة دالة الدالة :

(٦) أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي :

(ﺃ) ص = $ع^{٥}$ ، ع = $س^{٣}$ + ١

(ب) ص = $ع^{٢}$ ، ع = $س^{٤}$ − ٦

(ج) ص = $ع^{٢}$ ، ع = ٣ $س^{٢}$ − ٢ عندما س = ٢

(د) ص = $(١ - ٣ س)^{٥}$

(هـ) ص = $(٢ س^{٣} - ٤ س + ١)^{٩}$

(و) ص = $(٦ س^{٣} + ٣ س + ١)^{١٠}$

(٧) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(أ) ص = ٧ ع^{٣} ، ع = $\frac{س+١}{س-١}$

(ب) ص = (س^{٢} − س + ١)$^{-٤}$ عندما س = ١

(جـ) ص = ($\frac{س^{٢}-٢}{٣-س^{٢}}$)^{٧} عندما س = ٠

(د) ص^{٣} = ٣ س^{٢} − ٤

(٨) أوجد قيم س التى تجعل د$'$ (س) = ٧ حيث :

د (س) = (س − ٥)^{٧}

(٩) إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{(٢س^{٣}-٤س+٧)^{٢}}$ فاوجد $\frac{دص}{دس}$.

ثالثاً : أسئلة على تطبيقات على المشتقة :

(١٠) أوجد ميل كل من المماس والعمودى لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة :

(أ) ص = س^{٣} + س^{٢} − س + ١ عند س = −١

(ب) ص = س − $\frac{١}{س}$ عند النقطة (١ ، ٠)

(جـ) ص = $\frac{٥}{س-٣}$ عند س = ٢

(١١) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) ص = س^{٣} − س^{٢} − ٤ عند النقطة (١ ، −٤)

(ب) ص = (س − ١) (٢ س + ١) عند س = ٠

(جـ) ص = س (س − ١) (س + ١) عند س = ٠

(د) ص = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ − ١

(١٢) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} ويكون عندها المماس للمنحنى :

(أ) موازياً محور السينات .

(ب) عمودى على المستقيم : س + ٩ ص + ٣ = ٠

(١٣) أوجد معادلة المماس والعمودى لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

(أ) ص = ٢ س^{٢} − ٥ س + ١ عند س = ٢

(ب) ص = س^{٣} + س^{٢} − ١ عند س = −٢

(جـ) ص = (٣ س − ٥)^{٧} عند س = ٢

(د) ص = $\sqrt{س+٧}$ عند النقطة (٢ ، ٣)

(هـ) ص = $\frac{٣}{س-٢}$ عند س = ٤

(١٤) أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب عند النقطة (١ ، ٣) الواقعة عليه تساوى ٥ .

(١٥) إذا كان المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (−١ ، −٣) فأوجد قيمتى أ ، ب

الوحدة الثالثة :

٤ − التكامل

- **تعريف** : يقال أن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت$'$ (س) = د (س) لكل س فى مجال د .
- **التكامل غير المحدد** : هو مجموعة المشتقات العكسية للدالة د ونرمز لها بالرمز $\int$ د (س). (تكامل دالة س بالنسبة إلى س) .

قواعد التكامل

- قاعدة (١) :

$\int$ س^{ن} دس = $\frac{١}{ن+١}$ س$^{ن+١}$ + ث حيث : ث ثابت ، ن ≠ −١

أى : نزيد على الأس واحد ونقسم على الأس الجديد

- قاعدة (٢) :

$\int$ أ . د (س) دس = أ $\int$ د (س) دس حيث أ عدد ثابت

أى أن : تكامل الثابت × دالة = الثابت × تكامل الدالة

نتيجة :

$\int$ أ دس = أ س + ث

أى أن : تكامل الثابت بالنسبة إلى س = الثابت × س + ث

- قاعدة (٣) :

$\int$ [د (س) ± ر (س)] دس = $\int$ د (س) دس ± $\int$ ر (س) دس

- قاعدة (٤) :

$\int$ (أ س + ب)^{ن} دس = $\frac{١}{أ(ن+١)}$ (أ س + ب)$^{ن+١}$ + ث

، ن ≠ −١

- **ملحوظة هامة** :

لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمة دالتين ولذلك نلجأ لإجراء عملية الضرب أو القسمة قبل إجراء عملية التكامل .

الهروب من التعب ... تعب
والإقدام عليه ...... راحة

حاول أن تحل

(١) بيّن أن الدالة ت حيث $ت(س) = \frac{١}{٢} س^{٦}$ هى مشتقة عكسية للدالة د حيث $د(س) = ٣ س^{٥}$

تفكير ناقد : ما العلاقة بين $ت_{١}$ ، $ت_{٢}$ إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة د ؟

الحل

$ت'(س) = \frac{١}{٢} \times ٦ س^{٥} = ٣ س^{٥} = د(س)$ ∴ ت (س) مشتقة عكسية لـ د (س)

تفكير ناقد : إذا كان كل من $ت_{١}$ ، $ت_{٢}$ مشتقة عكسية للدالة د فإن :

$ت_{١}(س) = د(س) + ث_{١}$ ، $ت_{٢}(س) = د(س) + ث_{٢}$ ⇐ $ت_{١} - ت_{٢} = ثابت$

(٢) تحقق من صحة كل مما يأتى :

(أ) $\int س^{-٤} ءس = \frac{-١}{٣} س^{-٣} + ث$

(ب) $\int س \sqrt{١ + س^{٢}} ءس = \frac{١}{٣} (١ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

الحل

(أ) $\frac{ء}{ءس} (\frac{-١}{٣} س^{-٣} + ث) = \frac{-١}{٣} \times (-٣ س^{-٤}) = س^{-٤}$

∴ $\int س^{-٤} ءس = \frac{-١}{٣} س^{-٣} + ث$

(ب) $\frac{ء}{ءس} [\frac{١}{٣} (١ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث] = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٢} (١ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times ٢ س$

$= س \sqrt{١ + س^{٢}}$ ∴ $\int س \sqrt{١ + س^{٢}} ءس = \frac{١}{٣} (١ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٣) باستخدام تعريف التكامل أوجد المشتقة العكسية لكل من :

$٢٠ س^{٤}$ ، $-٥ س^{-٤}$

الحل

$\int ٢٠ س^{٤} ءس = \int ٤ (٥ س^{٤}) ءس = ٤ س^{٥} + ث$

، $\int -٥ س^{-٤} ءس = \int \frac{٥}{٣} (-٣ س^{-٤}) ءس = \frac{٥}{٣} س^{-٣} + ث$

(٤) أوجد :

(أ) $\int س^{٨} ءس$ (ب) $\int س^{\frac{٢}{٣}} ءس$

(ج) $\int س^{\frac{٧}{٩}} ءس$ (ء) $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} ءس$

الحل

(أ) $\int س^{٨} ءس = \frac{١}{٩} س^{٩} + ث$

(ب) $\int س^{\frac{٢}{٣}} ءس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٢}{٣} + ١} + ث = \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ث$

(ج) $\int س^{\frac{٧}{٩}} ءس$

$= \frac{٩}{١٦} س^{\frac{٧}{٩} + ١} + ث = \frac{٩}{١٦} س^{\frac{١٦}{٩}} + ث$

(ء) $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} ءس$

$= \frac{٧}{١٢} س^{\frac{٥}{٧} + ١} + ث = \frac{٧}{١٢} س^{\frac{١٢}{٧}} + ث$

(٥) أوجد كلاً من :

(أ) $\int ٣ س^{٤} ءس$ (ب) $\int -٢ ع ءع$

(ج) $\int -س ءس$ (ء) $\int -\frac{ءس}{٥}$

الحل

(أ) $= ٣ \int س^{٤} ءس = \frac{٣}{٥} س^{٥} + ث$

(ب) $= -\frac{٢}{٢} \times ع^{٢} + ث = -ع^{٢} + ث$

(ج) $= -\frac{١}{٢} س^{٢} + ث$

(ء) $= -\frac{١}{٥} س + ث$

(٦) أوجد :

(أ) $\int (٣ س^{٢} + ٢ س + ١) ءس$

(ب) $\int (\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ٣) ءس$

(ج) $\int ٢ س (س + ٣) ءس$

(ء) $\int \frac{٤ س^{٢} + ٩}{٢ س - ٣} ءس$

الحل

(أ) $= س^{٣} + س^{٢} - س + ث$

(ب) $\int (س^{-٢} + س^{\frac{١}{٢}} + ٣) ءس = \frac{-١}{س} + \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + ٣ س + ث$

(ج) $\int (٢ س^{٢} + ٦ س) ءس = \frac{٢}{٣} س^{٣} + ٣ س^{٢} + ث$

(ء) $\int \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٢س - ٣} ءس = \int (٢ س + ٣) ءس = س^{٢} + ٣ س + ث$

تفكير ناقد : تحقق من صحة العلاقة :

$\int (أ س + ب)^{ن} ءس = \frac{١}{أ(ن + ١)} (أ س + ب)^{ن + ١} + ث$

، ن ≠ −١ عن طريق تعريف المشتقة العكسية .

الحل

$\frac{ء}{ءس} [\frac{١}{أ(ن + ١)} (أ س + ب)^{ن + ١} + ث] = \frac{ن + ١}{أ(ن + ١)} (أ س + ب)^{ن} \times أ$

$= (أ س + ب)^{ن}$ = المشتقة العكسية للدالة التى تم إشتقاقها

(٧) أوجد :

(أ) $\int ٩ (٤ - ٣ س)^{٢} ءس$

(ب) $\int \frac{١٥}{(٣س - ٥)^{٦}} ءس$

الحل

(أ) $= ٩ \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{-٣} (٤ - ٣ س)^{٣} + ث = -(٤ - ٣ س)^{٣} + ث$

(ب) $= \int ١٥ (٣ س - ٥)^{-٦} ءس = ١٥ \times \frac{١}{-٥} \times \frac{١}{٣} (٣ س - ٥)^{-٥} + ث$

$= \frac{-١}{(٣س - ٥)^{٥}} + ث$

تمارين (١٢)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\int (س^{٢} - ٣)\, ء س$ = ...

(أ) ٢ س (ب) $س^{٣} - ٣ س$ (جـ) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٣ س + ث$ (ء) ٢ س − ٣ + ث

(٢) $\int ء س$ = ...

(أ) صفر (ب) س + ث (جـ) س (ء) ١ + ث

(٣) $\int \frac{ء س}{٣}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣} س + ث$ (ب) $\frac{١}{٣} + ث$ (جـ) $\frac{س + ث}{٣}$ (ء) $\frac{١}{٣}$

(٤) $\int س(س + ٢)\, ء س$ = ...

(أ) $س^{٢} + ٢ س + ث$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س + ث$ (جـ) $\frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢}$ (ء) $\frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} + ث$

(٥) $\int ٢\, ء ف$ = ...

(أ) ٢ ف (ب) ٢ + ث (جـ) ٢ س + ث (ء) ٢ ف + ث

(٦) $\int (٥ - ٢ ن)\, ء ن$ = ...

(أ) $٥ ن - ن^{٢} + ث$ (ب) ٥ − ٢ ن + ث (جـ) $٥ ن - ن^{٢}$ (ء) $\frac{٣}{٢} ن^{٢} + ث$

(٧) $\int (س - ١)(س + ١)\, ء س$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣} س^{٣} - س + ث$ (ب) $\frac{١}{٣} س^{٣} + س + ث$ (جـ) $\frac{١}{٣} س^{٣} - س - ث$ (ء) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ١ + ث$

(٨) $\int \frac{٤ س^{٥} - س^{٣}}{س^{٣}}\, ء س$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣} س^{٣} - س + ث$ (ب) $\frac{١}{٣} س^{٣} - س + ث$ (جـ) $\frac{٤}{٣} س^{٣} + س + ث$ (ء) $\frac{١}{٣} س^{٣} - س - ث$

(٩) $\int \frac{٤ س^{٢} - ٦ س}{٢ س - ٣}\, ء س$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ث$ (ب) س + ث (جـ) $س^{٢} + ث$ (ء) $س^{٢} - ث$

(١٠) $\int \frac{٤ س - ٦}{٢ س - ٣}\, ء س$ = ...

(أ) ٢ س + ث (ب) س + ث (جـ) $س^{٢} + ث$ (ء) س

(١١) إذا كانت ص = $\int ٣ س^{٢}\, ء س$ فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) $س^{٣} + ث$ (ب) $٣ س^{٢} + ث$ (جـ) $س^{٢} + ث$ (ء) $٣ س^{٢}$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) أوجد كل من التكاملات الآتية :

(أ) $\int ٨ س^{-٥}\, ء س$

(ب) $\int -\frac{٨}{٥} س^{-٣}\, ء س$

(جـ) $\int س^{\frac{٢}{٣}}\, ء س$

(ء) $\int \sqrt[٧]{س^{٥}}\, ء س$

(هـ) $\int \frac{٧}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}\, ء س$

(٢) أوجد كل من التكاملات الآتية :

(أ) $\int (٣ س^{٢} + ٢ س - ١)\, ء س$

(ب) $\int (ن^{٣} - ٦ ن^{٤})\, ء ن$

(جـ) $\int (أ س^{٢} - ب س + جـ)\, ء س$

(ء) $\int (\frac{٢}{ص^{٣}} - \frac{٤}{ص^{٥}})\, ء ص$

(هـ) $\int (\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})\, ء س$

(٣) أوجد كل من التكاملات الآتية :

(أ) $\int ٧ س^{٢}(س^{٤} - ١)\, ء س$

(ب) $\int س^{٢}(٢ س + \frac{١}{س})\, ء س$

(جـ) $\int (٢ س + ٣)(س - ١)\, ء س$

(ء) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}\, ء س$

(هـ) $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}\, ء س$

(و) $\int \frac{س^{٢} - ٢ س - ٨}{س + ٢}\, ء س$

(٤) أوجد كل من التكاملات الآتية :

(أ) $\int ٦(س - ٢)^{٥}\, ء س$

(ب) $\int ٧(٢ س - ٧)^{٦}\, ء س$

(جـ) $\int (٢ س - ٧)^{-٣}\, ء س$

(ء) $\int (٢ س - ٣)^{\frac{٧}{٣}}\, ء س$

(هـ) $\int ١٥ \sqrt{(٣ س - ٢)^{٥}}\, ء س$

الوحدة الرابعة : الاحتمال

مصطلحات ومفاهيم أساسية :

- التجربة العشوائية :

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكن لا نستطيع أن نحدد اياً من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها .

- فضاء العينة (فضاء النواتج) :

هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة ونرمز له بالرمز (ف) ونرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ن (ف) .

- طرق تمثيل فضاء العينة للتجربة العشوائية :

أولاً : طريقة الجدول :

وتستخدم عند إجراء التجربة مرتين وفيه نضع نواتج الرمية الأولى فى الصف ، ونواتج الرمية الثانية فى العمود .

ثانياً : طريقة الشبكة التربيعية (طريقة هندسية) :

وتستخدم أيضاً عند إجراء التجربة مرتين متتاليتين ، نرسم محورين متعامدين للربع الأول بحيث يمثل المحور السينى نواتج الرمية الأولى ، ويمثل المحور الصادى نواتج الرمية الثانية .

ثالثاً : طريقة الشجرة البيانية :

وتستخدم عند إجراء التجربة مرتين متتاليتين أو أكثر .

- الحدث :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .

- الحدث البسيط (الحدث الأولى) :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصر واحد فقط .

- الحدث المؤكد :

هو حدث مؤكد الوقوع فى كل مرة وهو فضاء العينة (ف) .

- الحدث المستحيل :

هو حدث مستحيل وقوعه فى أى مرة ويرمز له بالرمز $\varnothing$.

- ملاحظات هامة :

(١) فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين هو نفسه فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين (نستطيع التمييز بينهما) مرة واحدة .
وكذلك فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين هو نفسه فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتى نقود متمايزتين مرة واحدة .

(٢) عدد عناصر فضاء العينة = $ن^ر$ حيث ن عدد النواتج الممكنة فى المرة الواحدة ، ر عدد مرات إجراء التجربة

(٣) من المفيد تذكر بعض مجموعات الأعداد الآتية :

◈ مجموعة الأعداد الزوجية :
{ ٠ ، ± ٢ ، ± ٤ ، ± ٦ ، ± ٨ ، ...... }

◈ مجموعة الأعداد الفردية :
{ ± ١ ، ± ٣ ، ± ٥ ، ± ٧ ، .... }

◈ مجموعة الأعداد الأولية :
{ ± ٢ ، ± ٥ ، ± ٧ ، ± ٩ ، ± ١١ ، ± ١٣ ، ± ١٧ ، .... }

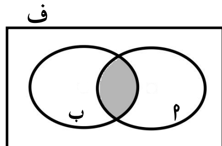
◈ مجموعة الأعداد المربعة : { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، .... }

(٤) إذا كان الفرق بين العددين = س هو (أ ، ب) فإن الفرق بين العددين = −س هو (ب،أ)
فإذا قيل أن الفرق بين العددين (فى التجربة العشوائية لإلقاء حجر نرد مرتين) = ٣
يكون الجواب هو { (٤ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }
أما إذا قيل أن الفرق بين العددين (فى التجربة العشوائية لإلقاء حجر نرد مرتين) = − ٣
يكون الجواب هو { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٦) }

(٥) الفرق المطلق بين عددين = الفرق بينهما بصرف النظر عن الإشارة (أى يسمح بالتبديل) .
فإذا قيل أن الفرق المطلق بين العددين (فى التجربة العشوائية لإلقاء حجر نرد مرتين) = ٣
يكون جوابنا هو { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٣) } .

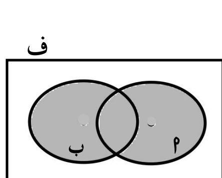
العمليات على الأحداث

- تقاطع الحدثين (أ ∩ ب) :



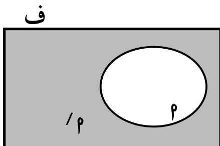
هو الحدث الذى يحوى كل العناصر التى تنتمى إلى أ ، ب معاً .
يعنى : وقوع أ و ب معاً
وأيضاً : وقوع الحدثين معاً .

- اتحاد الحدثين (أ ∪ ب) :



هو الحدث الذى يحوى كل العناصر التى تنتمى إلى أ أو ب أو كليهما
يعنى : وقوع أ أو ب
وأيضاً : وقوع أحدهما على الأقل .

- الحدث المكمل للحدث أ = (أ′) :



هو الحدث الذى يحوى كل العناصر التى لا تنتمى إلى الحدث أ .

يعنى : عدم وقوع الحدث ٩ .

ويلاحظ أن : ٩ ∪ ٩′ = ف ، ٩ ∩ ٩′ = ∅

• الفرق بين حدثين (٩ − ب) :

وهو يحوى كل العناصر التى تنتمى إلى ٩ ولا تنتمى إلى ب

يعنى : وقوع ٩ وعدم وقوع ب .

وأيضاً : وقوع ٩ فقط .

لاحظ أن : ٩ − ب = ٩ ∩ ب′ = ٩ − (٩ ∩ ب)

• قانونا دى مورجان :

إذا كان ٩ ، ب حدثين من ف فإن :

(١) ٩′ ∩ ب′ = (٩ ∪ ب)′

تعنى : عدم وقوع أى من الحدثين

وأيضاً : عدم وقوع ٩ وعدم وقوع ب .

(٢) ٩′ ∪ ب′ = (٩ ∩ ب)′

تعنى : عدم وقوع الحدثين معاً

وأيضاً : وقوع أحدهما على الأكثر .

• الحدثان المتنافيان :

يقال أن الحدثين ٩ ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر .

أى أن : ٩ ، ب حدثان متنافيان ⟺ ٩ ∩ ب = ∅

• ملاحظات :

(١) الأحداث البسيطة (الأولية) فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية .

(٢) أى حدث ٩ ومكمله ٩′ هما حدثان متنافيان .

(٣) يقال لعدة أحداث أنها متنافية ⟺ متنافية مثنى مثنى .

حساب الاحتمال

احتمال وقوع أى حدث ٩ ⊂ ف = ل (٩) = $\frac{\text{ن(٩)}}{\text{ن(ف)}}$

⇐ ل (٩) = $\frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ٩}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$

مسلمات الاحتمال

(١) لكل ٩ ⊂ ف فإن ٠ ⩽ ل (٩) ⩽ ١

ويعنى : احتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى ∈ [٠ ، ١]

(٢) ل (ف) = ١ ويعنى : احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

(٣) إذا كان : ٩ ، ب ⊂ ف ، ٩ ، ب حدثان متنافيان فإن :

ل (٩ ∪ ب) = ل (٩) + ل (ب)

• نتائج هامة :

(١) ل (∅) = ٠

(٢) ل (٩′) = ١ − ل (٩)

(٣) ل (٩ − ب) = ل (٩) − ل (٩ ∩ ب)

(٤) ل (٩ ∪ ب) = ل (٩) + ل (ب) − ل (٩ ∩ ب)

• ملاحظات :

(١) إذا كان ٩ ⊃ ب فإن ل (٩) ⩾ ل (ب) ،

ل (٩ ∪ ب) = ل (ب) ، ل (٩ ∩ ب) = ل (٩)

(٢) إذا كان : ل (٩) = ل (٩′) فإن : ل (٩) = $\frac{١}{٢}$

(٢) إذا كان : $\frac{\text{ل(٩′)}}{\text{ل(٩)}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ فإن ل (٩) = $\frac{\text{ص}}{\text{س+ص}}$

حاول أن تحل

(١) بيّن أياً من التجارب الآتية هى تجربة عشوائية :

(٩) إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات .

(ب) سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن تعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة .

(جـ) سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة .

الحل

(٩) التجربة عشوائية : ف = { (ص ، ك) ، (ص ، ص) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

(ب) التجربة غير عشوائية .

(جـ) التجربة عشوائية : ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ }

(٢) صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ . سُحبت كرتان الواحدة تلو الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة وبيّن عدد عناصره .

ملحوظة : السحب مع الاحلال يعنى ارجاع الكرة الأولى قبل سحب الثانية أما السحب بدون احلال فيعنى عدم ارجاع الكرة الأولى قبل السحبة الثانية وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها فى السحبة الثانية .

الحل

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) } ⇐ ن (ف) = ٣^٢ = ٩

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين . أوجد فضاء النواتج ثم عيّن الأحداث الآتية :

(أ) " حدث ظهور صورة على الأقل "

(ب) " حدث ظهور كتابتين على الأكثر "

(ج) " حدث ظهور كتابة على الأكثر "

الحل

ف = { (ص ، ص) ، (ك ، ك)
، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)
، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) }

أ = { (ص ، ص) ، (ص ، ك ، ص)
، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) }

ب = ف

ج = { (ص ، ص) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) }

(٤) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها .

أولاً : مثل فضاء العينة هندسياً وأكتب كلاً من الحدثين الآتيين :

أ حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوى ٥ "

ب حدث " ظهور عددين أحدهما ضعف الآخر "

ثانياً : هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .

الحل

أولاً : فضاء العينة كما هو موضح بالشبكة التربيعية .

أ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) }

ب = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

ثانياً : ∵ أ ∩ ب = ∅

⇐ أ ، ب حدثان متنافيان .

(٥) سحبت كرة عشوائياً من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء ، كرتان لونهما أحمر ، الباقى باللون الأخضر ، احسب احتمال الأحداث الآتية :

أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء .

ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء .

ج حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء .

الحل

ل (أ) = $\frac{٥ + ٢}{١٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$

أو ل (الكرة ليست خضراء) = ١ − ل (الكرة خضراء) = ١ − $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$

، ل (ب) = ل (أ) = $\frac{٧}{١٠}$ ، ل (ج) = ل (ف) = ١

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث

ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ احسب :

(أ) ل (ب′) (ب) ل (ب − أ) (ج) ل (أ′ ∪ ب′)

الحل

(أ) ل (ب′) = ١ − ل (ب) = ١ − $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

(ب) ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

(ج) ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

ملحوظة هامة :

فى حالة توافر العناصر الثلاثة الأساسية : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∩ ب) كما فى هذا المثال فإننا نوجد المطلوب فوراً باستخدام القوانين .

(٧) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء تجربة عشوائية ما ف وكان :

ل (أ) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ − ب) = $\frac{٣}{٨}$ فأوجد :

(أ) ل (أ′) (ب) ل (أ′ ∪ ب′) (ج) ل (ب ∩ أ′)

الحل

∵ ل (أ − ب) = $\frac{٣}{٨}$

∴ ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

(أ) ل (أ′) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

(ب) ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

(ج) ل (ب ∩ أ′) = ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

ملحوظة هامة : فى حالة عدم توافر أى عنصر من العناصر الأساسية : ل (أ) أ، ل (ب) أ، ل (أ ∩ ب) فإننا نحلل المعلومات المعطاة للوصول له قبل البدء فى إيجاد المطلوب .

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

ل (أ) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب)′ = ٠,١

فاحسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

(أ) حدث " وقوع أحد الحدثين على الأقل "

(ب) حدث " وقوع أ فقط "

(ج) حدث " وقوع أحد الحدثين فقط "

(ى) حدث " وقوع أحد الحدثين على الأكثر "

الحل

∵ ل (أ ∪ ب)′ = ٠,١ ∴ ١ − ل (أ ∪ ب) = ٠,١ ∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٩

∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ + ٠,٦ − ٠,٩ = ٠,٥

(أ) ل (أ ∪ ب) = ٠,٩

(ب) ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٨ − ٠,٥ = ٠,٣

(ج) ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٩ − ٠,٥ = ٠,٤

(ى) ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل (ب) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ) :

(أ) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين .

(ب) إذا كان ب ⊂ أ

<u>تفكير ناقد</u> : بيّن كيف يمكن حساب ل (أ) إذا كان أ ⊂ ف ، ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، إذا كان : $\frac{ل(\bar{أ})}{ل(أ)} = \frac{٣}{٧}$

الحل

∵ ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ ∴ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) =

∴ ل (أ) + $\frac{١}{٥}$ − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ ∴ ل (أ) = $\frac{٢}{١٥}$ + ل (أ ∩ ب) .... (١)

(أ) ∵ أ ، ب متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر وبالتعويض فى (١)

∴ ل (أ) = $\frac{٢}{١٥}$ + ٠ = $\frac{٢}{١٥}$

(ب) ∵ ب ⊂ أ ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (ب) = $\frac{١}{٥}$ وبالتعويض فى (١)

∴ ل (أ) = $\frac{٢}{١٥}$ + $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١}{٣}$

<u>تفكير ناقد</u> :

∵ $\frac{ل(\bar{أ})}{ل(أ)} = \frac{٣}{٧}$ ∴ $\frac{١ - ل(أ)}{ل(أ)} = \frac{٣}{٧}$ ∴ ٣ ل (أ) = ٧ − ٧ ل (أ)

∴ ٣ ل (أ) + ٧ ل (أ) = ٧ ∴ ١٠ ل (أ) = ٧ ⇐ ل (أ) = $\frac{٧}{١٠}$

(١٠) إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث

ف = { أ ، ب، ج } ، وكان $\frac{ل(\bar{أ})}{ل(أ)} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ل(\bar{ب})}{ل(ب)} = \frac{٥}{٢}$

أوجد ل (ج) .

الحل

∵ $\frac{ل(\bar{أ})}{ل(أ)} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ∵ $\frac{ل(\bar{ب})}{ل(ب)} = \frac{٥}{٢}$ ∴ ل (ب) = $\frac{٢}{٧}$

، ∵ ل (ف) = ١ أى أن : ل (أ) + ل (ب) + ل (ج) = ١

⇐ ل (ج) = ١ − [ل (أ) + ل (ب)] = ١ − [$\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٢}{٧}$] = $\frac{٤}{٣٥}$

(١١) <u>تطبيقات حياتية</u> : للحصول على وظيفة فى إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين أحدهما نظرى والآخر عملى ، إذا كان احتمال النجاح فى الاختبار النظرى ٠,٧٥ واحتمال نجاحه فى الاختبار العملى ٠,٦ واحتمال النجاح فى الاختبارين معاً ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على الوظيفة لأول مرة .

أوجد احتمال :

(أ) نجاحه فى الاختبار النظرى فقط .

(ب) نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل .

الحل

بفرض احتمال النجاح فى الاختبار النظرى = ل (أ) = ٠,٧٥

، احتمال النجاح فى الاختبار العملى = ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٥

(أ) ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧٥ − ٠,٥ = ٠,٢٥

(ب) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧٥ + ٠,٦ − ٠,٥ = ٠,٨٥

<u>تفكير ناقد</u> : صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه فى المباراتين معاً ٠,٥ . هل يتفق ماصرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسّر .

الحل

بفرض احتمال الفوز فى مباراة الذهاب = ل (ا) = ٠.٧

، احتمال الفوز فى مباراة الأياب = ل (ب) = ٠.٩ ، ل (ا ط ب) = ٠.٥

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧ + ٠,٩ − ٠,٥ = ١,١ ∌ [٠ ، ١]

∴ تصريح المدرب لا يتفق مع مفهوم الاحتمال .

(١٢) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، احسب احتمال :

أولاً : أ حدث " العددان الظاهران متساويان "

ثانياً : ب حدث " العدد فى الرمية الأولى فردى وفى الرمية الثانية زوجى "

الحل

<u>أولاً</u> : أ = { (١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦) }

∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

<u>ثانياً</u> : ب = { (١،٢) ، (١،٤) ، (١،٦) ، (٣،٢) ، (٣،٤) ، (٣،٦) ، (٥،٢) ، (٥،٤) ، (٥،٦) }

∴ ل (ب) = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

(١٣) ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية ولوحظ تتابع الصور والكتابات . احسب احتمالات الأحداث الآتية :

أولاً : أ حدث ظهور نفس الوجه فى الرميات الثلاث

ثانياً : ب حدث ظهور صورة على الأكثر

ثالثاً : ج حدث ظهور عدد فردى من الصور

رابعاً : د حدث ظهور كتابة على الأقل

خامساً : هـ حدث ظهور عدد الصور = عدد الكتابات

الحل

ن (ف) = ٢^٣ = ٨

<u>أولاً</u> : أ = { (ص ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ⇐ ل (أ) = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

<u>ثانياً</u> : ب = { (ك ، ك ، ك) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) }

⇐ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

<u>ثالثاً</u> : ج = { (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ص ، ص ، ص) }

⇐ ل (ج) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

<u>رابعاً</u> : د = { (ك ، ص ، ص) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ⇐ ل (د) = $\frac{٧}{٣٦}$

<u>خامساً</u> : هـ = ∅ ⇐ ل (هـ) = صفر (حدث مستحيل)

لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد

(١٤) فى أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة وبياناتهم موضحة بالجدول التالى :

	يتحدث العربية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث الفرنسية	المجموع
رجل	٥٠	٤٥	٢٥	١٢٠
إمرأة	٤٥	٣٠	٥	٨٠
المجموع	٩٥	٧٥	٣٠	٢٠٠

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائياً فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار :

(أ) لا يتحدث الإنجليزية .

(ب) يتحدث الألمانية .

(ج) إمرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية .

(د) رجل يتحدث العربية أو إمرأة تتحدث الإنجليزية .

الحل

(أ) ل (لا يتحدث الإنجليزية) = ١ − ل (يتحدث الإنجليزية)

$= ١ - \frac{٧٥}{٢٠٠} = \frac{٥}{٨}$

(ب) ل (يتحدث الألمانية) = صفر

(ج) ل (إمرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية) = $\frac{٥+٣٠}{٢٠٠} = \frac{٧}{٤٠}$

(ء) ل (رجل يتحدث العربية أو إمرأة تتحدث الإنجليزية) = $\frac{٥٠+٣٠}{٢٠٠} = \frac{٢}{٥}$

تمارين (١٣)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (ء) $\frac{١}{٦}$

(٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى وعدد أولى فى الرمية الثانية هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٩}$ (ء) $\frac{١}{٤}$

(٣) إذا سحبت كرة عشوائياً من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو ....

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٧}{١٥}$ (ء) $\frac{١}{٢}$

(٤) يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ . اختيرت بطاقة عشوائياً فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقماً فردياً هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (ء) $\frac{٥}{٩}$

(٥) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ، وكان ب ⊂ أ ، ل (أ) = ٢ ل (ب) = ٠,٦ فإن ل (أ − ب′) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٤ (ء) ٠,٢

• فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن :

(٦) احتمال الحصول على العدد ٥ فى الرمية الأولى والعدد ٦ فى الرمية الثانية هو ....

(أ) $\frac{١}{٢٤}$ (ب) $\frac{١}{٣٠}$ (ج) $\frac{١}{٣٦}$ (ء) $\frac{١}{٦}$

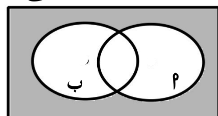
(٧) احتمال الحصول على العدد ٥ فى إحدى الرميتين والعدد ٦ فى الرمية الأخرى هو ....

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{٥}{٣٦}$ (ء) $\frac{١}{١٨}$

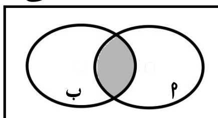
(٨) احتمال الحصول على عددين متساويين فى الرميتين هو ....

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣٦}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (ء) $\frac{١}{١٨}$

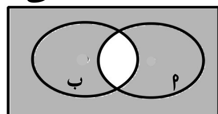
• أ ، ب حدثان من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، □ اختر الحدث الذى يعبر عن الجزء المظلل بشكل فن المقابل .



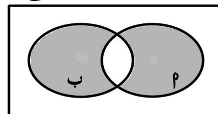
(٩) (أ) ف − (أ ∪ ب)
(ب) أ′ ∪ ب′
(ج) ف − (أ′ ∪ ب′)
(ء) (أ ∩ ب)′



(١٠) (أ) أ ∩ ب
(ب) أ ∪ ب′
(ج) (أ ∪ ب)′
(ء) أ′ ∪ ب′



(١١) (أ) (أ ∪ ب) − (أ ∩ ب)
(ب) ف − (أ ∩ ب)′
(ج) ف − (أ ∪ ب)′
(ء) ف − (أ ∩ ب)



(١٢) (أ) ف − (أ ∩ ب)
(ب) أ′ ∩ ب′
(ج) (أ − ب) ∪ (ب − أ)
(ء) ف − (أ ∪ ب)′

• إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن :

(١٣) أ ∩ ب = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) أ (ء) ب

(١٤) أ − ب = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) أ (ء) ب

(١٥) ب − أ = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) أ (ء) ب

- إذا كان ب ⊃ أ فإن :

(١٦) أ ∩ ب = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) أ (ء) ب

(١٧) أ ∪ ب = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) أ (ء) ب

(١٨) ب − أ = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) أ (ء) ب

- إذا كان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن :

(١٩) ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٨ (ء) ٠,٧

(٢٠) ل (ب − أ) = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) ٠,٤ (ء) ٠,٢

(٢١) ل (أ′ ∩ ب′) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٨ (ء) ٠,٧

(٢٢) إذا كان أ ∩ ب = ∅ ، ل (أ′) = ٠,٧ ، ل (ب′) = ٠,٤ فإن :

ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ١,١ (ب) ٠,٧ (جـ) ١,٣ (ء) ٠,٩

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

أولاً : مسائل على حساب الاحتمال :

(١) صندوق به كرات متماثلة وملونة منها ٤ حمراء ، ٦ زرقاء ، ٥ صفراء . سحبت منه كرة واحدة عشوائياً . احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(أ) حمراء (ب) زرقاء أو صفراء

(جـ) ليست زرقاء (ء) ليست حمراء ولا صفراء

(٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى . أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(أ) حدث " ظهور عدد أكبر من ٢ "

(ب) حدث " ظهور عدد أكبر من ٢ وأصغر من ٣ "

(جـ) حدث " ظهور عدد فردى يقبل القسمة على ٣ "

(ء) حدث " ظهور عدد أولى "

(هـ) حدث " ظهور عدداً زوجياً مربعاً كاملاً "

(٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة . احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

(أ) حدث " ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى " .

(ب) حدث " مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨ " .

(جـ) حدث " مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوى ٥ "

(ء) حدث " ظهور عدد فردى فى الرمية الأولى وعدد زوجى فى الرمية الثانية " .

(٤) خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ ، سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة الرقم المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين .

أوجد احتمال :

(أ) أن يكون رقم الآحاد عدداً أولياً .

(ب) أن يكون رقم العشرات عدداً فردياً .

(جـ) أن يكون رقم الآحاد عدداً أولياً أو رقم العشرات عدداً فردياً .

(٥) تقدم لوظيفة أحد البنوك ٥٠ شخصاً موزعين كما هو موضح بالجدول التالى .

الجنس	مؤهلات عليا	مؤهلات متوسطة	المجموع
ذكر	١٦	١٤	٣٠
أنثى	١٢	٨	٢٠
المجموع	٢٨	٢٢	٥٠

اختير أحد المتقدمين عشوائياً . أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار :

(أ) من ذوى المؤهلات المتوسطة .

(ب) ذكر من ذوى المؤهلات العليا .

(جـ) أنثى أو من ذوى المؤهلات العليا .

ثانياً : مسائل على مسلمات وقوانين الاحتمال :

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما ، ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب :

(أولاً) ل (أ′) (ثانياً) ل (أ ∪ ب)

(ثالثاً) ل (أ − ب) (رابعاً) ل (أ′ ∪ ب′)

(٧) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨٥ ، ل (أ) = ٠,٧٥ ، ل (ب′) = ٠,٦ . أوجد

(أولاً) ل (أ ∩ ب) (ثانياً) ل (أ ∩ ب′)

(ثالثاً) ل (أ′ ∪ ب′)

(٨) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ،
وكان ل (٢′) = $\frac{٣}{٥}$ ل (٢ ∪ ب) = ٠,٤٥
فأوجد ل (ب) فى كل من الحالات الآتية :
(أولاً) ٢ ، ب حدثان متنافيان
(ثانياً) ٢ ⊃ ب (ثالثاً) ل (٢ – ب) = ٠,٢

(٩) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ،
وكان ل (٢) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = س ، ل (٢ ∪ ب)′ = $\frac{١}{٣}$
أولاً : أوجد قيمة س فى كل من الحالتين الآتيتين :
(١) ٢ ، ب حدثان متنافيان (٢) ٢ ⊃ ب
ثانياً : إذا كانت س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد ل (٢ ∩ ب)

(١٠) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ،
وكان ل (ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (٢) ، ل (٢ – ب) = ٠,٢٤ ،
ل (ب∩٢′) = ٠,١٥
أوجد : ل (٢) ، ل (ب) ، ل (٢ ∪ ب) ، ل (٢′∪ ب′)

(١١) إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث
ف = { ٢ ، ب ، جـ } ، وكان $\frac{ل(٢^-)}{ل(٢)} = \frac{٨}{٣}$ ، $\frac{ل(ب^-)}{ل(ب)} = \frac{٥}{٢}$
فأوجد : $\frac{ل(جـ^-)}{ل(جـ)}$

(١٢) إذا كان ف = { ٢ ، ب ، جـ ، ء } فضاء عينة لتجربة عشوائية
أوجد : ل (٢) ، ل (ب) إذا كان ل (٢) = ٣ ل (ب) ،
ل (جـ) = ل (ء) = $\frac{٧}{١٨}$

(١٣) إذا كان ف = { ٢ ، ب ، جـ } فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ،
وكان ٢٠ ل (٢) = ١٥ ل (ب) = ١٢ ل (جـ) فأوجد :
ل (٢) ، ل (ب) ، ل (جـ) .

(١٤) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ،
وكان ل (٢′) = $\frac{١}{٣}$ ل (٢) ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (٢′ ∪ ب′) = $\frac{٥}{٨}$
فأوجد :
(أولاً) احتمال وقوع الحدث ا والحدث ب معاً .
(ثانياً) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل .
(ثالثاً) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث ٢ .

(١٥) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ،
وكان ل (٢) = $\frac{٢}{٣}$ ل (ب) ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر ٠,٧٥ ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأقل ٠,٦ ،
فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :
(أولاً) احتمال وقوعهما معاً .
(ثانياً) وقوع أحد الحدثين فقط .
(ثالثاً) وقوع ب أو عدم وقوع ٢ .

حلول التمارين

تمارين (١)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) $ح_{ن} = ٥ن$ ، $ن \geq ٥$ ∴ $ح_{٥} = ٥ \times ٥ = ٢٥$

(٢) $ح_{١٠} = \frac{٢}{١٠} - ١ = -\frac{٤}{٥}$

(٣) $ح_{ن} = (ن+١)(ن+٢)$ لأن $ح_{١} = (١+١)\times(١+٢)$
، $ح_{٢} = (٢+١)\times(٢+٢)$ ، $ح_{٣} = (٣+١)\times(٣+٢)$ ، $ح_{٤} = (٤+١)\times(٤+٢)$

(٤) بوضع $ن = ١$ ⇐ $ح_{٢} = ١ \times ١ = ١$

(٥) $ح_{٤} = (٤)^{٢} + ٣ = ١٩$

(٦) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢)^{ر-١} = ٣١$

(٧) $ح_{ر} = ٥ \times ر$ ∴ المتسلسلة هي : $\sum_{ر=١}^{١٠} ٥ر$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) غير منتهية (ب) غير منتهية لأنها تتوقف عند الحد ٢١
(جـ) غير منتهية لأن ن غير محددة (د) منتهية لأنها ٥ حدود

(٢) (أ) $ح_{١} = \frac{١}{٣\times١-٥} = \frac{١}{-٢}$ ، $ح_{٢} = \frac{١}{٣\times٢-٥} = ١$ ، $ح_{٣} = \frac{١}{٣\times٣-٥} = \frac{١}{٤}$ ، $ح_{٤} = \frac{١}{٣\times٤-٥} = \frac{١}{٧}$ ، $ح_{٥} = \frac{١}{٣\times٥-٥} = \frac{١}{١٠}$
$(ح_{ن}) = (-\frac{١}{٢} ، ١ ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٧} ، \frac{١}{١٠} ، ......)$

(ب) $ح_{١} = -١(١-٢)^{٢} = -١$ ، $ح_{٢} = (-١)^{٢}(٢-٢)^{٢} = ٠$
، $ح_{٣} = (-١)^{٣}(٣-٢)^{٢} = -١$ ، $ح_{٤} = (-١)^{٤}(٤-٢)^{٢} = ٤$
، $ح_{٥} = (-١)^{٥}(٥-٢)^{٢} = -٩$ ⇐ $(ح_{ن}) = (-١ ، ٠ ، -١ ، ٤ ، -٩ ، ......)$

(٣) (أ) $ح_{١} = ٢(١) - ١ = ١$ ، $ح_{٢} = ٢(٢) - ١ = ٣$ ، $ح_{٣} = ٢(٣) - ١ = ٥$
، $ح_{٤} = ٢(٤) - ١ = ٧$ ، $ح_{٥} = ٢(٥) - ١ = ٩$
⇐ $(ح_{ن}) = (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ......)$

(ب) $ح_{١} = (١)^{٢} = ١$ ، $ح_{٢} = (٢)^{٢} = ٤$ ، $ح_{٣} = (٣)^{٢} = ٩$ ، $ح_{٤} = (٤)^{٢} = ١٦$ ،
$ح_{٥} = (٥)^{٢} = ٢٥$ ⇐ $(ح_{ن}) = (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ......)$

(٤) (أ) $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = ١ \times ٣ = ٣$ ، $ح_{٣} = ٢ \times ٣ = ٦$
، $ح_{٤} = ٣ \times ٦ = ١٨$ ، $ح_{٥} = ٤ \times ١٨ = ٧٢$ ، $ح_{٦} = ٥ \times ٧٥ = ٣٦٠$
⇐ $(ح_{ن}) = (٣ ، ٣ ، ٦ ، ١٨ ، ٧٢ ، ٣٦٠ ، ......)$

(ب) $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = ٢ \times ٣ = ٦$ ، $ح_{٣} = ٢ \times ٦ = ١٢$ ، $ح_{٤} = ٢ \times ١٢ = ٢٤$
، $ح_{٥} = ٢ \times ٢٤ = ٤٨$ ، $ح_{٦} = ٢ \times ٤٨ = ٩٦$
⇐ $(ح_{ن}) = (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦ ، ......)$

(جـ) $ح_{١} = -١$ ، $ح_{٢} = ٢ \times -١ = -٢$ ، $ح_{٣} = ٢ \times -٢ = -٤$
، $ح_{٤} = ٢ \times -٤ = -٨$ ، $ح_{٥} = ٢ \times -٨ = -١٦$ ، $ح_{٦} = ٢ \times -١٦ = -٣٢$
⇐ $(ح_{ن}) = (-١ ، -٢ ، -٤ ، -٨ ، -١٦ ، -٣٢ ، ......)$

(د) $ح_{٣} = ح_{٢} + ح_{١} = ٥ + ٢ = ٧$ ، $ح_{٤} = ح_{٣} + ح_{٢} = ٧ + ٥ = ١٢$
، $ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٣} = ١٢ + ٧ = ١٩$ ، $ح_{٦} = ح_{٥} + ح_{٤} = ١٩ + ١٢ = ٣١$
⇐ $(ح_{ن}) = (٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ٣١ ، ......)$

(٥) (أ) $ح_{١} = ١$ ، $ح_{٢} = ح_{١} + ٢$ ، $ح_{٣} = ح_{٢} + ٣$ ، $ح_{٤} = ح_{٣} + ٤$
، $ح_{٥} = ح_{٤} + ٥$ وهكذا ∴ النمط يتبع المتتابعة : $ح_{١} = ١$ ، $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ن$
، $ن \geq ١$ والحد التالي هو $ح_{٦} = ح_{٥} + ٦ = ١٥ + ٦ = ٢١$

(ب) $ح_{١} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_{٢} = \frac{١}{٢} ح_{١}$ ، $ح_{٣} = \frac{١}{٢} ح_{٢}$ ، $ح_{٤} = \frac{١}{٢} ح_{٣}$ وهكذا
∴ النمط يتبع المتتابعة : $ح_{١} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_{ن} = \frac{١}{٢} ح_{ن-١}$ ، $ن \geq ٢$
والحد التالي هو $ح_{٦} = \frac{١}{٢} ح_{٥} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٦٤}$
حل آخر : $ح_{ن} = (\frac{١}{٢})^{ن}$

(جـ) $ح_{١} = ٦١ + ٤$ ، $ح_{٢} = ٦١ + ٤(٢)$ ، $ح_{٣} = ٦١ + ٤(٣)$
، $ح_{٤} = ٦١ + ٤(٤)$ ، $ح_{٥} = ٦١ + ٤(٥)$ ∴ النمط هو : $ح_{ن} = ٦١ + ٤ن$ ،
$ن \geq ١$ والحد التالي هو $ح_{٦} = ٦١ + ٤ \times ٦ = ٨٥$
حل آخر : النمط هو $ح_{ن} = ح_{ن-١} + ٤$ ، $ن \geq ٢$

(د) $ح_{١} = ٣(-٢)^{١}$ ، $ح_{٢} = ٣(-٢)^{٢}$ ، $ح_{٣} = ٣(-٢)^{٣}$ ، $ح_{٤} = ٣(-٢)^{٤}$
وهكذا ∴ النمط هو : $ح_{ن} = ٣(-٢)^{ن}$ ، $ن \geq ١$
والحد التالي هو $ح_{٦} = ٣(-٢)^{٦} = ٩٦$

(٦) (أ) بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨
∴ $\sum_{ر=١}^{٨} ((-١)^{ر} + ٤ر) = (-١ + ٤) + (١ + ٨) + (-١ + ١٢) +$
$(١ + ١٦) + (-١ + ٢٠) + (١ + ٢٤) + (-١ + ٢٨) + (١ + ٣٢)$
$= ٣ + ٩ + ١١ + ١٧ + ١٩ + ٢٥ + ٢٧ + ٣٣$

(ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}) = (١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥}) +$
$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٢٠} + ...$

(٧) (أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢}) = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠$

(ب) $\sum_{ك=٣}^{٩} (٣ك + ١) = (٣\times٣ + ١) + (٣\times٤ + ١) + (٣\times٥ + ١) +$
$(٣\times٦ + ١) + (٣\times٧ + ١) + (٣\times٨ + ١) + (٣\times٩ + ١)$
$= ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩ + ٢٢ + ٢٥ + ٢٨ = ١٣٣$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٥} (\frac{١}{٣})^{ر} = (\frac{١}{٣})^{١} + (\frac{١}{٣})^{٢} + (\frac{١}{٣})^{٣} + (\frac{١}{٣})^{٤} + (\frac{١}{٣})^{٥}$
$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} + \frac{١}{٢٤٣} = \frac{١٢١}{٢٤٣}$

(٨) (أ) $(ح_{ن}) = (٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ......)$
(ب) $ح_{ن} = ٦ + ٢ن$
(جـ) $ح_{٧} = ٦ + ٢ \times ٧ = ٢٠$ دقيقة

(ء) بوضع $ح_{ن}$ = ٣٠ ∴ ٦ + ٢ن = ٣٠ ∴ ٢ن = ٢٤ ⇐ ن = ١٢

أى سيكون الزمن ٣٠ دقيقة فى اليوم الثانى عشر.

تمارين (٢)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) أ = ٢ ، ء = ٥ − ٢ = ٣ ⇐ $ح_{٧}$ = أ + ٦ء = ٢ + ٦ × ٣ = ٢٠

(٢) $ح_{١}$ = ٨٥ − ٤ × ١ ، $ح_{٢}$ = ٨٥ − ٤ × ٢ ، $ح_{٣}$ = ٨٥ − ٤ × ٣ وهكذا

∴ $ح_{ن}$ = ٨٥ − ٤ن

(٣) ∵ (٥أ − ١) − (٢أ + ١) = (٦أ + ٣) − (٥أ − ١)

لأن كل منهما = الأساس ∴ ٣أ − ٢ = أ + ٤ ⇐ ٢أ = ٦ ∴ أ = ٣

(٤) س − ٢٩ = ٩٥ − ٣س (كل منهما = ء) ⇐ س = ٣١

(٥) $ح_{ن}$ < ٠ ⇐ ١٥ − ٣ن < ٠ ∴ −٣ن < −١٥ ∴ ن > ٥

∴ أول حد سالب هو $ح_{٦}$

(٦) $\frac{٨ + ١٢}{٢} = ١٠$

(٧) ٢١ = $\frac{س + ٢٦}{٢}$ ∴ س + ٢٦ = ٤٢ ⇐ س = ٤٢ − ٢٦ = ١٦

(٨) $\frac{٣س − ٧ + ٥س + ٣}{٢} = \frac{٨س − ٤}{٢}$ = ٤س − ٢

(٩) ٢٤ − أ = ب − ٢٤ ∴ ٢٤ + ٢٤ = أ + ب ∴ أ + ب = ٤٨

(١٠) $ح_{٥}$ = ٣ × ٥ − ٢ = ١٣ ، $ح_{١١}$ = ٣ × ١١ − ٢ = ٣١

الوسط الحسابى = $\frac{١٣ + ٣١}{٢}$ = ٢٢

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) ٥٠س − ٩ − ١٦ − ٤٠س = ٥س + ٦ − ٣س − ١٥

⇐ ٨س = ١٦ ∴ س = ٢ ∴ المتتابعة هى : (٩٦ ، ٩١ ، .... ، ٢١ ، ١٦)

أ = ٩٦ ، ء = ٩١ − ٩٦ = −٥ ، ل = ١٦ ، ∵ ١٦ = ٩٦ + (ن − ١) × −٥

∴ ١٦ = ٩٦ − ٥ن + ٥ ⇐ ٥ن = ٨٥ ∴ ن = ١٧ حداً

(٢) أ = ١٢ ، ء = ١٤ − ١٢ = ٢

(أ) $ح_{٨}$ = أ + ٧ء = ١٢ + ٧ × ٢ = ٣٦

(ب) $ح_{ن}$ = ١٢ + (ن − ١) × ٢ = ١٠٢ ⇐ ١٢ + ٢ن − ٢ = ١٠٢ ∴ ٢ن = ٩٢

∴ ن = ٤٦ ⇐ $ح_{٤٦}$ = ١٠٢

(٣) أ = ٢ ، ء = ٥ − ٢ = ٣ ، ل = ٨٠ ∴ ٢ + (ن − ١) × ٣ = ٨٠

∴ ٢ + ٣ن − ٣ = ٨٠ ⇐ ٣ن = ٨١ ∴ ن = ٢٧ ∴ عدد الحدود = ٢٧ حداً

(٤) أ = ٦٣ ، ء = ٥٥ − ٥٩ = −٤ ، ل = −١٣٣

∴ −١٣٣ = ٦٣ + (ن − ١) × −٤ ⇐ ٤ن = ١٨٠ ∴ ن = ٧٠ حداً

(٥) ١١ − ٨ = ١٤ − ١١ = ٣ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة حسابية

أ = ٨ ، ء = ٣ ، ل = ٥٠ ⇐ ٥٠ = ٨ + (ن − ١) × ٣ ⇐ ٤٥ = ٣ن ∴ ن = ١٥

(٦) أ = ١١ ، ء = ٧ − ٩ = −٢

، بوضع $ح_{ن}$ < ٠ ∴ ١١ + (ن − ١) × −٢ < ٠ ∴ −٢ن < −١٣

∴ ن > ٦,٥ ∴ أول حد سالب = $ح_{٧}$ = ١١ + ٦ × −٢ = −١

(٧) $ح_{١}$ = ٢ + ٥ × ١ = ٧ ، $ح_{٢}$ = ٢ + ٥ × ٢ = ١٢ ، $ح_{٣}$ = ٢ + ٥ × ٣ = ١٧

بوضع $ح_{ن}$ = ٧٢ ∴ ٢ + ٥ن = ٧٢ ⇐ ن = ١٤ ∴ $ح_{١٤}$ = ٧٢

، بوضع $ح_{ن}$ > ١٠٠ ⇐ ٢ + ٥ن > ١٠٠ ∴ ن > ١٩,٦

∴ أول حد قيمته أكبر من ١٠٠ هو $ح_{٢٠}$

(٨) $ح_{٧}$ = ١٨ ⇐ أ + ٦ء = ١٨ ، $ح_{١٥}$ = ٣٤ ⇐ أ + ١٤ء = ٣٤

وبحل المعادلتين معاً ∴ أ = ٦ ، ء = ٢ ∴ ($ح_{ن}$) = (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ....)

(٩) $ح_{٥}$ = ٢١ ⇐ أ + ٤ء = ٢١ ، $ح_{١٠}$ = ٣$ح_{٢}$ ⇐ أ + ٩ء = ٣(أ + ء)

∴ ٢أ − ٦ء = ٠ وبحل المعادلتين معاً ∴ أ = ٩ ، ء = ٣

∴ ($ح_{ن}$) = (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ....)

(١٠) $ح_{٤}$ = ١١ ⇐ أ + ٣ء = ١١ ، $ح_{٥}$ + $ح_{٩}$ = ٤٠ ⇐ ٢أ + ١٢ء = ٤٠

وبحل المعادلتين معاً ∴ أ = ٢ ، ء = ٣ ∴ ($ح_{ن}$) = (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....)

بوضع $ح_{ن}$ = ١٥٢ ∴ ٢ + (ن − ١) × ٣ = ١٥٢ ⇐ ٣ن = ١٥٣ ∴ ن = ٥١

(١١) ٢أ + ء = ٩ ، أ + ٤ء = ٢٢ وبحل المعادلتين معاً ⇐ أ = ٢ ، ء = ٥

∴ ($ح_{ن}$) = (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ....)

(١٢) $ح_{٢٠}$ = ٤١ ⇐ أ + ١٩ء = ٤١ ، $ح_{٩}$ + ١ = $ح_{٣}$ + $ح_{٦}$ ⇐ أ + ٨ء + ١ =

أ + ٢ء + أ + ٥ء ⇐ أ − ء = ١ وبحل المعادلتين معاً ∴ أ = ٣ ، ء = ٢

∴ ($ح_{ن}$) = (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....)

(١٣) $ح_{٦}$ = ٢٠ ⇐ أ + ٥ء = ٢٠ ، $\frac{ح_{٤}}{ح_{١٠}} = \frac{٤}{٧}$ ∴ $\frac{أ + ٣ء}{أ + ٩ء} = \frac{٤}{٧}$

∴ ٧أ + ٢١ء = ٤أ + ٣٦ء ⇐ ٣أ − ١٥ء = ٠ وبحل المعادلتين معاً

∴ أ = ١٠ ، ء = ٢ ∴ ($ح_{ن}$) = (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ....)

(١٤) أ = ٣ ، ٣ + (ن − ١)ء = ٣٩ ⇐ (ن − ١)ء = ٣٦ .... (١)

، ٣ + (٢ن − ١)ء = ٧٩ ⇐ (٢ن − ١)ء = ٧٦ .... (٢) بقسمة (١) ÷ (٢)

∴ $\frac{(ن − ١)ء}{(٢ن − ١)ء} = \frac{٣٦}{٧٦}$ ⇐ $\frac{ن − ١}{٢ن − ١} = \frac{٩}{١٩}$ ∴ ١٩ن − ١٩ = ١٨ن − ٩

∴ ن = ١٠ بالتعويض فى (١) ∴ ٩ء = ٣٦ ⇐ ء = ٤

∴ ($ح_{ن}$) = (٣ ، ٧ ، ١١ ، ....)

(١٥) أ + ب = ١٦ ، ٤أ + ٢ب = ٤٠ ⇐ ٢أ + ب = ٢٠ وبحل المعادلتين معاً

∴ أ = ٤ ، ب = ١٢

(١٦) ن = ١٦ + ٢ = ١٨ حداً ∴ أ = ٢٧ ، $ح_{١٨}$ = −٢٤

⇐ ٢٧ + ١٧ء = −٢٤ ∴ ١٧ء = −٥١ ∴ ء = −٣

∴ الأوساط هى : (٢٤ ، ٢١ ، ١٨ ، ...... ، −١٨ ، −٢١)

(١٧) $ح_{٩}$ = ٢٥ ⇐ أ + ٨ء = ٢٥ ، $ح_{٣}$ + $ح_{٥}$ = ٢٠ ⇐ ٢أ + ٦ء = ٢٠

وبحل المعادلتين معاً ∴ أ = ١ ، ء = ٣ ∴ ($ح_{ن}$) = (١ ، ٤ ، ٧ ، ....)

(١٨) أ = ٢ ، ل = ٤٧

، ∵ $\frac{و_{٢}}{ل − ر} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{ح_{٣}}{٤٧ − ء} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{٢ + ٢ء}{٤٧ − ء} = \frac{٢}{٧}$

∴ ٧ + ٧ء = ٤٧ − ء ⇐ ٨ء = ٤٠ ∴ ء = ٥

∴ ٤٧ = ٢ + (ن − ١) × ٥ ∴ ٤٧ = ٢ + ٥ن − ٥ ∴ ٥ن = ٥٠

∴ ن = ١٠

تمارين (٣)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) جـ$_{٢٠}$ = ١٠ (١ + ٢٠) = ٢١٠

(٢) جـ$_{١٠}$ = ٥ (٢ × ٢ + ٩ × ٢) = ١١٠

(٣) أ = ١١ ، ء = ٢ ، ل = ٢٩ ∴ ٢٩ = ١١ + (ن − ١) × ٢ ∴ ن = ١٠
∴ جـ$_{١٠}$ = ٥ (١١ + ٢٩) = ٢٠٠

(٤) أ = ٣٣ ، ل = ٤٨ ، ء = ٣ ∴ ٤٨ = ٣٣ + (ن − ١) × ٣ ∴ ن = ٦
∴ جـ$_{٦}$ = ٣ × (٣٣ + ٤٨) = ٢٤٣

(٥) جـ$_{٩}$ = $\frac{٩}{٢}$ (٢ + ١٨) = ٩٠

(٦) ٣٥ (باستخدام الآلة الحاسبة)

(٧) ٢٤ (باستخدام الآلة الحاسبة)

(٨) ∵ ل = ٥ ن − ١ ∴ الصيغة هى : $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ ر − ١)

(٩) أ = ٧ ، ء = ١٢ − ٧ = ٥ ∴ ع$_{ر}$ = ٧ + (ن − ١) × ٥ = ٥ ر + ٢
∴ صيغة المتسلسلة هى : $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٥ ر + ٢)

(١٠) ٧٢ (باستخدام الآلة الحاسبة)

(١١) −٥٧٥ (باستخدام الآلة الحاسبة)

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) −٢٢٢٣ (باستخدام الآلة الحاسبة)
(ب) أ = ٢ ، ء = ٣ ، ل = ٦٢ ∴ ٦٢ = ٢ + (ن − ١) × ٣ ⟸ ن = ٢١
∴ جـ$_{٢١}$ = $\frac{٢١}{٢}$ (٢ + ٦٢) = ٦٧٢
أو : (−١ + ٣) + (−١ + ٢ × ٣) + (−١ + ٣ × ٣) + ... + (−١ + ٢١ × ٣)
∴ مجموع المتسلسلة = $\sum_{ن=١}^{٢١}$ (−١ + ٣ ن) = ٦٧٢
(جـ) أ = ٨٩ ، ء = −٤ ، ل = ٣٣ ∴ ٣٣ = ٨٩ + (ن − ١) × (−٤) ⟸ ن = ١٥
∴ جـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ (٨٩ + ٣٣) = ٩١٥
حل آخر : (٩٣ − ٤) + (٩٣ − ٢ × ٤) + ... + (٩٣ − ١٥ × ٤)
∴ مجموع المتسلسلة = $\sum_{ن=١}^{١٥}$ (٩٣ − ٤ ن) = ٩١٥
(ء) ٣ + (٢ × ٣) + (٣ × ٣) + ... + (٣ ن)
∴ $\sum_{ن=١}^{١٥}$ (٣ ن) = ٣٦٠ ، $\sum_{ن=٥}^{١٥}$ (٣ ن) = ٣٣٠

(٢) (أ) جـ$_{١٠}$ = ٥ (٢ × ١٤ + ٩ × ٤) = ٣٢٠
(ب) (−١ + ٣) + (−١ + ٢ × ٣) + (−١ + ٣ × ٣) + ... + (−١ + ٢٧ × ٣)
∴ $\sum_{ن=١}^{٢٧}$ (−١ + ٣ ن) = ١١٠٧
(جـ) ع$_{١٢}$ = ٣٨ ⟸ أ + ١١ ء = ٣٨ ، ع$_{٣٥}$ = ٢٤٥ ⟸ أ + ٣٤ ء = ٢٤٥
بحل المعادلتين باستخدام الآلة نجد أن : أ = −٦١ ، ء = ٩
∴ جـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ (٢ × −٦١ + ١٤ × ٩) = ٣٠

(٣) ء = ٢ ، أ = ٦ ∴ المتتابعة هى : (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ....)
جـ$_{١٠}$ = ٥ (٢ × ٦ + ٩ × ٢) = ١٥٠

(٤) أ = ٥ ، ء = ٨ − ٥ = ٣ ∴
(أ) جـ$_{٢٠}$ = ١٠ (٢ × ٥ + ١٩ × ٣) = ٦٧٠
(ب) ع$_{٩}$ = أ + ٨ ء = ٥ + ٨ × ٣ = ٢٩
∴ جـ$_{١٠}$ المطلوبة = ٥ (٢ × ٢٩ + ٩ × ٣) = ٤٢٥
(جـ) ن = ٢٠ − ١٠ + ١ = ١١ حداً ، ع$_{١٠}$ = أ + ٩ ء = ٥ + ٩ × ٣ = ٣٢
جـ$_{١١}$ = $\frac{١١}{٢}$ (٢ ع$_{١٠}$ + ١٠ ء) = $\frac{١١}{٢}$ (٢ × ٣٢ + ١٠ × ٣) = ٥١٧

(٥) أ = ١٦ ، ء = ٢٤ − ٢٠ = ٤ ، بوضع جـ$_{ن}$ = ٤٠٠
∴ ٤٠٠ = ٢ × ١٦ + (ن − ١) × ٤ ∴ ٤٠٠ = ٣٢ + ٤ ن − ٤ ⟸ ن = ٩٣

(٦) أ = ٢٧ ، ء = ٢١ − ٢٤ = −٣ ، بوضع جـ$_{ن}$ = صفر
∴ ٢ × ٢٧ + (ن − ١) × −٣ = ٠ ∴ ٥٧ = ٣ ن ⟸ ن = ١٩ حداً

(٧) أ = −١٦ ، ء = −١٢ + ١٤ = ٢ ، بوضع جـ$_{ن}$ = صفر
∴ ٢(−١٦) + (ن − ١) × ٢ = ٠ ∴ ٢ ن = ٣٤ ⟸ ن = ١٧ حداً

(٨) (أ) جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (ع$_{١}$ + ع$_{ن}$) ∴ ٥٤٥ = $\frac{ن}{٢}$ (٢٣ + ٨٦)
∴ ١٠٩٠ = ١٠٩ ن ⟸ ن = ١٠ ∴ ع$_{١٠}$ = ٨٦ ⟸ ٢٣ + ٩ ء = ٨٦ ⟸ ء = ٧
∴ المتتابعة هى : (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، .... ، ٨٦)
(ب) −٥٨٥ = $\frac{ن}{٢}$ (١٧ − ٩٥) ∴ −١١٧٠ = −٧٨ ن ⟸ ن = ١٥ حداً
ع$_{١٥}$ = −٩٥ ⟸ ١٧ + ١٤ ء = −٩٥ ⟸ ء = −٨
∴ المتتابعة (١٧ ، ٩ ، ١ ، ....)

(٩) ٢٩ = ٢ + ٩ ء ⟸ ء = ٣ ∴ الأوساط هى (٥ ، ٨ ، ١١ ، .... ، ٢٣ ، ٢٦)

(١٠) ع$_{١٩}$ + ع$_{٢٠}$ = ١٤٤ ⟸ أ + ١٨ ء + أ + ١٩ ء = ١٤٤
∴ ٢ أ + ٣٧ ء = ١٤٤ .... (١) ، ع$_{٢٠}$ + ع$_{٢١}$ = ١٥٢
∴ أ + ١٩ ء + أ + ٢٠ ء = ١٥٢ ∴ ٢ أ + ٣٩ ء = ١٥٢ .... (٢)
، بحل المعادلتين جبرياً باستخدام الآلة ∴ أ = −٢ ، ء = ٤
(أ) ع$_{٢٠}$ = أ + ١٩ ء = −٢ + ١٩ × ٤ = ٧٤
(ب) ١٦٠ = [٢ أ + (ن − ١) ء] ∴ ١٦٠ = −٤ + (ن − ١) × ٤
∴ ٤ ن = ١٦٨ ⟸ ن = ٤٢ حداً

تمارين (٤)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) ع$_{٧}$ = أ ر^{٦} = ٦٤ × ($\frac{١}{٢}$)^{٦} = ١

(٢) ع$_{٦}$ = $\frac{١}{٢٤٣}$ × (٣)^{٥} = ١

(٣) ع$_{٥}$ = ٢ × (٣)^{٤} = ١٦٢

(٤) ع$_{ن}$ = ٣ (−٢)$^{ن − ١}$

(٥) الوسط الهندسى = ± $\sqrt{٤ × ١٦}$ = ± $\sqrt{٦٤}$ = ± ٨

(٦) ٩ × ص = $(١٥)^{٢}$ ∴ ٩ ص = ٢٢٥ ⇐ ص = $\frac{٢٢٥}{٩}$ = ٢٥

(٧) ب = ± $\sqrt{أ\,جـ}$

(٨) $ع_{٥}$ = ٨ $(\frac{٣}{٤})^{٤}$ = $\frac{٨١}{٣٢}$

(٩) (ب) $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-١}}$ = $\frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية .

(١٠) $ع_{ن}$ = ٢ × $(٢)^{ن-١}$ = $٢^{ن}$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) $ع_{١٠}$ = أ $ر^{٩}$ = ($\frac{١}{٨}$) × $(٢)^{٩}$ = ٦٤

(ب) $\frac{١}{٨}$ × $٢^{ن-١}$ = ١٠٢٤ ⇐ $٢^{ن-١}$ = ٨ × ١٠٢٤ = $٢^{١٣}$ ∴ ن − ١ = ١٣

∴ ن = ١٤ ⇐ $ع_{١٤}$ = ١٠٢٤

(٢) (أ) ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ (ب) ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧

(٣) (أ) $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = $\frac{٥ × ٢^{ن+١}}{٥ × ٢^{ن}}$ = ٢ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية

حيث : ر = ٢ ، $ع_{١}$ = أ = ٥ × ٢ = ١٠ ∴ م.هـ : (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ....)

(ب) ليست متتابعة هندسية لأن $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ ≠ مقدار ثابت

(جـ) $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-١}}$ = $\frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية .

∴ المتتابعة هى : (١٢ ، ٣ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ....)

(٤) $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = $\frac{٢ × ٣^{ن-٤}}{٢ × ٣^{ن-٥}}$ = ٣ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية.

أ = $ع_{١}$ = ٢ × $٣^{١-٥}$ = $\frac{٢}{٨١}$ ، $ع_{٧}$ = ٢ × $(٣)^{٧-٥}$ = ١٨

(٥) $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = $\frac{٢^{ن+١}}{٢^{ن}}$ = ٢ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية .

$ع_{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$ × $٢^{٨}$ = ٩٦ ، بوضع $ع_{ن}$ = ٧٦٨ ∴ $\frac{٣}{٨}$ × $٢^{ن}$ = ٧٦٨

∴ $٢^{ن}$ = ٧٦٨ × $\frac{٨}{٣}$ = ٢٠٤٨ = $٢^{١١}$ ⇐ ن = ١١ ⇐ $ع_{١١}$ = ٧٦٨

(٦) (أ) $ع_{٦}$ = ٢٨٨ ∴ ٩ $ر^{٥}$ = ٢٨٨ ∴ $ر^{٥}$ = ٣٢ = $٢^{٥}$ ⇐ ر = ٢

∴ المتتابعة الهندسية هى : (٩ ، ١٨ ، ٣٦ ، ....)

(ب) $ع_{٣}$ = ٢٤ ∴ أ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = ٢٤ ⇐ أ = ٩٦

∴ المتتابعة هى : (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ....)

(جـ) $ع_{٣}$ = ١٢ ⇐ أ $ر^{٢}$ = ١٢ ، $ع_{٨}$ = ٣٨٤ ⇐ أ $ر^{٧}$ = ٣٨٤ وبالقسمة

∴ $\frac{أ ر^{٧}}{أ ر^{٢}}$ = $\frac{٣٨٤}{١٢}$ ∴ $ر^{٥}$ = ٣٢ = $٢^{٥}$ ⇐ ر = ٢ وبالتعويض فى المعادلة

الأولى ∴ ٤ أ = ١٢ ⇐ أ = ٣ ∴ المتتابعة الهندسية هى : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....)

(د) $ع_{٣}$ = ١٨ ⇐ أ $ر^{٢}$ = ١٨ ، $ع_{٦}$ = ٤٨٦ ⇐ أ $ر^{٥}$ = ٤٨٦ بقسمة

المعادلتين ∴ $\frac{أ ر^{٥}}{أ ر^{٢}}$ = $\frac{٤٨٦}{١٨}$ ∴ $ر^{٣}$ = ٢٧ ⇐ ر = ٣ وبالتعويض فى المعادلة

الأولى ∴ ٩ أ = ١٨ ⇐ أ = ٢ ∴ المتتابعة الهندسية هى : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....)

(٧) بفرض العددين أ ، ب ∴ أ + ب = ١٠ .... (١) ، أ ب = ٩ .... (٢)

من (١) ب = ١٠ − أ ...... (٣) بالتعويض فى (٢) ∴ أ (١٠ − أ) = ٩

∴ ١٠ أ − $أ^{٢}$ = ٩ ∴ $أ^{٢}$ − ١٠ أ + ٩ = ٠ ∴ أ = ١ أ، أ = ٩

ومن (٣) ∴ ب = ٩ أ، ب = ١ ∴ العددان هما ٩ ، ١

(٨) بفرض العددين هما أ ، ب ∴ أ − ب = ٨ ⇐ ب = أ − ٨ .... (١)

، أ ب = ٩ وبالتعويض من (١) ∴ أ (أ − ٨) = ٩ ∴ $أ^{٢}$ − ٨ أ − ٩ = ٠

∴ أ = ٩ أ، أ = −١ (مرفوض) ومن (١) ∴ ب = ١ ∴ العددان هما ٩ ، ١

(٩) بفرض العددين هما أ ، ب ∴ $\sqrt{أب}$ − أ = ٢ ⇐ $\sqrt{أب}$ = ٢ + أ .... (١)

، ب − $\sqrt{أب}$ = ٣ ⇐ $\sqrt{أب}$ = ب − ٣ .... (٢) من (١) ، (٢)

∴ ٢ + أ = ب − ٣ ∴ ب = أ + ٥ .... (٣) وبتربيع (١)

∴ أب = $أ^{٢}$ + ٤ أ + ٤ وبالتعويض من (٣) ∴ أ (أ + ٥) = $أ^{٢}$ + ٤ أ + ٤

∴ ٥ أ = ٤ أ + ٤ ⇐ أ = ٤ ومن (٣) ∴ ب = ٩ ∴ العددان هما ٤ ، ٩ .

(١٠) ن = ٥ + ٢ = ٧ ∴ $ع_{٧}$ = ٢٩١٦ ∴ أ $ر^{٦}$ = ٢٩١٦ ∴ ٤ $ر^{٦}$ = ٢٩١٦

∴ $ر^{٦}$ = $\frac{٢٩١٦}{٤}$ = ٧٢٩ = $(± ٣)^{٦}$ ⇐ ر = ± ٣

∴ الأوساط الهندسية هى : (١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢)

أو : (−١٢ ، ٣٦ ، −١٠٨ ، ٣٢٤ ، −٩٧٢)

(١١) ن = ٧ + ٢ = ٩ ⇐ $ع_{٩}$ = $\frac{١٦}{٨١}$ ∴ أ $ر^{٨}$ = $\frac{١٦}{٨١}$ ∴ $\frac{٨١}{١٦}$ $ر^{٨}$ = $\frac{١٦}{٨١}$

∴ $ر^{٨}$ = $\frac{١٦}{٨١}$ ÷ $\frac{٨١}{١٦}$ = $\frac{١٦ × ١٦}{٨١ × ٨١}$ = $(\frac{٢}{٣})^{٨}$ ∴ ر = ± $\frac{٢}{٣}$ ، ∵ المطلوب

أوساط موجبة ∴ ر = $\frac{٢}{٣}$ ∴ الأوساط هى : ($\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٨}{٢٧}$)

(١٢) أ = ٥٤ ، $ع_{٤}$ = ٢ ∴ أ $ر^{٣}$ = ٢ ⇐ ٥٤ $ر^{٣}$ = ٢ ∴ $ر^{٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$ = $(\frac{١}{٣})^{٣}$

∴ ر = $\frac{١}{٣}$ ∴ س = أ ر = ٥٤ × $\frac{١}{٣}$ = ١٨ ، ص = ١٨ × $\frac{١}{٣}$ = ٦

(١٣) ∵ (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى ∴ ١ + ص = ٢ س ∴ ص = ٢ س − ١

، ∵ (١ ، ص ، س) فى تتابع هندسى ∴ ١ × س = $ص^{٢}$ وبالتعويض عن قيمة

ص ∴ س = $(٢ س − ١)^{٢}$ ∴ ٤ $س^{٢}$ − ٤ س + ١ − س = ٠

∴ ٤ $س^{٢}$ − ٥ س + ١ = ٠ ∴ س = ١ (مرفوض من شروط المسألة)

∴ س = $\frac{١}{٤}$ وبالتعويض فى المعادلة الأولى ∴ ص = ٢ × $\frac{١}{٤}$ − ١ = −$\frac{١}{٢}$

تمارين (٥)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) $جـ_{ن}$ = $\frac{أ(ر^{ن} − ١)}{ر − ١}$ ∴ $جـ_{٥}$ = $\frac{١(٢^{٥} − ١)}{٢ − ١}$ = ٣١

(٢) $ع_{٥}$ = $جـ_{٥}$ − $جـ_{٤}$ = ($٣^{٥}$ − ١) − ($٣^{٤}$ − ١) = ٢٤٢ − ٨٠ = ١٦٢

(٣) ر = $\frac{١}{٢}$ < ١ ∴ $جـ_{∞}$ = $\frac{أ}{١ − ر}$ = $\frac{٤}{١ − \frac{١}{٢}}$ = ٨

(٤) ∵ $جـ_{∞}$ = $\frac{أ}{١ − ر}$ ∴ ٤ = $\frac{أ}{١ − \frac{١}{٤}}$ ∴ أ = ٤ × $\frac{٣}{٤}$ = ٣

(٥) ∵ $جـ_{∞}$ = $\frac{أ}{١ − ر}$ ∴ ٩٦ = $\frac{١٢}{١ − ر}$ ∴ ٨ (١ − ر) = ١

∴ ٨ − ٨ ر = ١ ⇐ ٨ ر = ٨ − ١ = ٧ ∴ ر = $\frac{٧}{٨}$

(٦) أ = أ ر + أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ + ... ∞ ∴ أ = $\frac{أ ر}{١ − ر}$ ∴ ١ − ر = ر

∴ ٢ ر = ١ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) $جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٢٠٤٨ - ١٢٨ \times \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٩٦٨$

(ب) $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} = \frac{٤(٣^٦ - ١)}{٣ - ١} = ١٤٥٦$

---

(٢) (أ) $أ = ١٢٥$ ، $ر = \frac{٥}{٢٥} = \frac{١}{٥}$ ∴ $جـ_٦ = \frac{١٢٥\left[١ - (\frac{١}{٥})^٦\right]}{١ - \frac{١}{٥}} = ١٥٦,٢٤$

(ب) $أ = ٣$ ، $ر = \frac{-٦}{٣} = -٢$ ، $ل = ٧٦٨$

∴ $جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٣ - ٧٦٨ \times (-٢)}{١ - (-٢)} = ٥١٣$

---

(٣) (أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{ر-١} = ٨١٨٤$

(ب) $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦(\frac{١}{٢})^{ر-١} = \frac{٥١١}{٦٤}$

---

(٤) $أ = ٣$ ، $ر = ٢$ ∴ $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ⇐ $٣٨١ = \frac{٣(٢^ن - ١)}{٢ - ١}$

∴ $١٢٧ = ٢^ن - ١$ ∴ $٢^ن = ١٢٨ = ٢^٧$ ⇐ $ن = ٧$ حداً

---

(٥) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{١٠ \times ٢^{ن+١-٢}}{١٠ \times ٢^{ن-٢}} = ٢$ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية

∴ $٢٥٥٥ = \frac{٥(٢^ن - ١)}{٢ - ١}$ ∴ $١ - (٢)^ن = -٥١١$ ∴ $٢^ن = ٥١٢ = ٢^٩$

∴ $ن = ٩$ حدود

---

(٦) $أ ر = ١٢$ ، $ح_٤ = ٢ ح_٣$ ∴ $\frac{ح_٤}{ح_٣} = ٢$ ⇐ $ر = ٢$ ∴ $٢أ = ١٢$

⇐ $أ = ٦$ ، $جـ_٧ = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} = \frac{٦(٢^٧ - ١)}{٢ - ١} = ٧٦٢$

---

(٧) $أ ر = ٦$ ...... (١) ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$ ⇐ $أ ر^٢ - أ = ٩$

∴ $أ(ر^٢ - ١) = ٩$ ...... (٢) بقسمة المعادلتين : ∴ $\frac{ر^٢ - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$

⇐ $٢ر^٢ - ٢ = ٣ر$ ∴ $٢ر^٢ - ٣ر - ٢ = ٠$ ⇐ $ر = ٢$ أ، $ر = -\frac{١}{٢}$

(مرفوض لأن الحدود موجبة) ومن (١) ∴ $أ = ٣$

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ......) ، $جـ_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

---

(٨) $ح_١ + ح_٢ = ٤٨$ ⇐ $أ + أ ر = ٤٨$ ∴ $أ(١ + ر) = ٤٨$ ...... (١)

، $ح_٣ + ح_٤ = ١٩٢$ ⇐ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ١٩٢$ ∴ $أ ر^٢(١ + ر) = ١٩٢$ ... (٢)

بقسمة المعادلتين : $ر^٢ = ٤$ ∴ $ر = ٢$ والسالب مرفوض لأن الحدود موجبة

ومن (١) ∴ $أ(١ + ٢) = ٤٨$ ∴ $أ = ١٦$

(أ) المتتابعة هى (١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ......)

(ب) $جـ_{١٠} = \frac{١٦(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ١٦٣٦٨$

---

(٩) $جـ_٤ = ٦٠$ ⇐ $\frac{أ(ر^٤ - ١)}{ر - ١} = ٦٠$ ...... (١) ، $جـ_٨ = ٦٠ + ٩٦٠ = ١٠٢٠$

⇐ $\frac{أ(ر^٨ - ١)}{ر - ١} = ١٠٢٠$ ∴ $\frac{أ(ر^٤ - ١)(ر^٤ + ١)}{ر - ١} = ١٠٢٠$ ...... (٢) وبالقسمة

(٢) على (١) : ∴ $ر^٤ + ١ = ١٧$ ⇐ $ر^٤ = ١٦ = (\pm ٢)^٤$ ∴ $ر = \pm ٢$ ونرفض

السالب لأن الحدود موجبة ∴ $ر = ٢$ وبالتعويض فى (١)

∴ $\frac{أ(١٦ - ١)}{٢ - ١} = ٦٠$ ∴ $١٥أ = ٦٠$ ⇐ $أ = ٤$

∴ المتتابعة هى : (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ......) ، $جـ_٧ = \frac{١٦(٢^٧ - ١)}{٢ - ١} = ٢٠٣٢$

---

(١٠) (أ) $ر = ٢$ ∴ $|ر| > ١$ ∴ لا يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها .

(ب) $ر = \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٥ \times ٢^{ن+١}}{٥ \times ٢^ن} = ٢$ ∴ $|ر| > ١$

∴ لا يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها .

(جـ) $ر = \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٥^{١-ن-١}}{٢ \times ٥^{١-ن}} = ٥^{-١} = \frac{١}{٥}$ ∴ $|ر| < ١$ ، $أ = ح_١ = ٢$

∴ $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٥}} = ٢,٥$

(ء) $ر = \frac{٣^{٣-ن-١}}{٣^{٣-ن}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $|ر| < ١$ ، $أ = ح_١ = ٣^٢ = ٩$

∴ $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٩}{١ - \frac{١}{٣}} = ١٣,٥$

(هـ) $ر = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ∴ $|ر| < ١$ ∴ $جـ_\infty = \frac{٢}{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ٤ + ٢\sqrt{٢}$

---

(١١) (أ) $أ = ٥٦$ ، $ر = \frac{٣}{٤}$ ∴ $جـ_\infty = \frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}} = ٢٢٤$

(ب) $أ = ٤٢$ ، $ر = \frac{٦}{٧}$ ∴ $جـ_\infty = \frac{٤٢}{١ - \frac{٦}{٧}} = ٢٩٤$

---

(١٢) $أ = ١٨$ ، $ح_٤ = \frac{١٦}{٣}$ ∴ $أ ر^٣ = \frac{١٦}{٣}$ ∴ $١٨ ر^٣ = \frac{١٦}{٣}$

∴ $ر^٣ = \frac{٨}{٢٧} = (\frac{٢}{٣})^٣$ ∴ $ر = \frac{٢}{٣}$ ∴ $جـ_\infty = \frac{١٨}{١ - \frac{٢}{٣}} = ٥٤$

---

(١٣) $ح_١ + ح_٢ = ١٦$ ⇐ $أ + أ ر = ١٦$ .... (١) ، $جـ_\infty = ٢٥$ ⇐

$\frac{أ}{١ - ر} = ٢٥$ .... (٢) بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أ}{١ - ر} \div أ(١ + ر) = \frac{٢٥}{١٦}$

∴ $(١ - ر)(١ + ر) = \frac{١٦}{٢٥}$ ∴ $١ - ر^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$ ∴ $ر^٢ = ١ - \frac{١٦}{٢٥} = \frac{٩}{٢٥}$

∴ $ر = \pm \frac{٣}{٥}$ ومن (٢) : عندما $ر = \frac{٣}{٥}$ ∴ $أ = ٢٥(١ - \frac{٣}{٥}) = ١٠$

∴ المتتابعة هى : (١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، ....)

ومن (٢) : عندما $ر = -\frac{٣}{٥}$ ∴ $أ = ٢٥(١ + \frac{٣}{٥}) = ٤٠$

∴ المتتابعة هى : (٤٠ ، ٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، ....)

---

(١٤) $أ = \frac{أ ر}{١ - ر}$ ⇐ $ر = ١ - ر$ ∴ $ر = \frac{١}{٢}$ ، $ح_١ + ح_٢ = ٩$

∴ $أ + أ ر = ٩$ ∴ $أ + \frac{١}{٢}أ = ٩$ ∴ $\frac{٣}{٢}أ = ٩$ ⇐ $أ = ٦$

∴ المتتابعة هى : (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ....)

---

(١٥) $ح_١ + ح_٢ = ٣٦$ ∴ $أ + أ ر = ٣٦$ ، $(ح_٣)^٢ = ٣٦$ ∴ $أ ر^٢ = ٦$

بقسمة المعادلتين : ∴ $\frac{ر^٢}{١ + ر} = \frac{١}{٦}$ ∴ $٦ر^٢ = ١ + ر$ ∴ $٦ر^٢ - ر - ١ = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$ أ، $ر = -\frac{١}{٣}$ (مرفوض) ومن المعادلة الثانية : $\frac{١}{٩}أ = ٦$ ⇐

$أ = ٥٤$ ∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ٢٧ ، $\frac{٢٧}{٢}$ ، ....) ، $جـ_\infty = \frac{٥٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٠٨$

---

(١٦) المتتابعة التزايدية هى : (١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ....)

، المتتابعة الثابتة هى : (١٦ ، ١٦ ، ١٦ ، ....)

، المتتابعة التناقصية هى : (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ....) ، $جـ_\infty = \frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٢$

من طلب العلا سهر الليالى

تمارين (٦)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) عدد طرق جلوس الطالب الأول = ٤ ، عدد طرق جلوس الثانى = ٣
، عدد طرق جلوس الثالث = ٢ ، عدد طرق جلوس الرابع = ١
∴ عدد الطرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢) عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٣ (لأنه لا معنى لاختيار الصفر)
، عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٣ ∴ عدد طرق اختيار الأعداد = ٣ × ٣

(٣) عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ ، عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٣
، عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ ∴ عدد الطرق = ٢ × ٣ × ١

(٤) عدد طرق اختيار الرئيس = ١٢ ، عدد طرق اختيار نائب الرئيس = ١١
∴ عدد الطرق = ١٢ × ١١ = ١٣٢

(٥) عدد طرق ترتيب الحرف الأول = ٤ ، عدد طرق ترتيب الحرف الأول = ٣
، عدد طرق ترتيب الحرف الأول = ٢ ، عدد طرق ترتيب الحرف الأول = ١
∴ عدد الطرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

(٦) الأعداد المعطاة لا يمكن تكوين عدد أولى منها مهما أختلف ترتيبها
ولذلك فإن عدد الطرق = صفر

(٧) تم تحديد عدد محدد أى اختيار واحد ∴ عدد الطرق = ١

(٨) عدد طرق رقم الآحاد = ٥ ، عدد طرق رقم العشرات = ٥
، عدد طرق رقم المئات = ٥ ∴ عدد الطرق = ٥ × ٥ × ٥

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) عدد طرق اختيار طالب = ٣ ، عدد طرق اختيار طالبة = ٢
∴ عدد الطرق = ٣ × ٢ = ٦

(٢) عدد الأعداد = ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧

(٣) عدد طرق اختيار المئات = ٣ (لأنه لا معنى لاختيار الصفر على اليسار)
، عدد طرق اختيار العشرات = ٤ ، عدد طرق اختيار الآحاد = ٤
∴ عدد الطرق = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨

(٤) عدد طرق اختيار المئات = ٣ ، عدد طرق اختيار العشرات = ٣
، عدد طرق اختيار الآحاد = ٢ ∴ عدد الطرق = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨

(٥) عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٢ ، عدد طرق اختيار العشرات = ٤
، عدد طرق اختيار المئات = ٣ ∴ عدد الطرق = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

(٦) عدد طرق اختيار الآحاد = ١ ، عدد طرق اختيار العشرات = ٣
، عدد طرق اختيار المئات = ٢ ، عدد طرق اختيار الألوف = ١
∴ عدد الطرق = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦

(٧) عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٢ ، عدد طرق اختيار الآحاد = ٣
، عدد طرق اختيار المئات = ٢ ، عدد طرق اختيار الألوف = ١
∴ عدد الطرق = ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ١٢

وقل رب زدنى علماً

تمارين (٧)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) نجرى تحليل المضروب كما هو مبين بالشكل المجاور :
∴ ٢٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = |٤
∴ |ن = |٤ ⇐ ن = ٤

٢٤ | ٢
١٢ | ٣
٤ | ٤
١ |

(٢) بالضرب × ٢ ∴ ٢ن |٢ن−١ = ٢٤
∴ |٢ن = |٤ ∴ ٢ن = ٤ ⇐ ن = ٢

(٣) $\frac{١}{|ن} = \frac{٢}{(ن+١)|ن}$ ⇐ ن + ١ = ٢ ⇐ ن = ١

(٤) إما ن − ٥ = ٠ ⇐ ن = ٥ أ، ن − ٥ = ١ ⇐ ن = ٦ ∴ ن ∈ {٥ ، ٦}

(٥) نجرى تحليل تبديلة كما بالشكل المجاور :
∴ ٦٠ = ٥ × ٤ × ٣ = $^{٥}ل_{٣}$
∴ $^{٥}ل_{ر} = {}^{٥}ل_{٣}$
⇐ ر = ٣

٦٠ | ٥
١٢ | ٤
٣ | ٣
١ |

(٦) نأخذ الجذر التكعيبى للعدد ١٢٠ نجده يساوى تقريباً ٤,٩٣ = ٥
∴ ١٢٠ = ٦ × ٥ × ٤ ∴ $^{ن}ل_{٣} = {}^{٦}ل_{٣}$ ⇐ ن = ٦

(٧) عدد عناصر ص = $^{٥}ل_{٢}$ = ٢٠ عنصر

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) عدد الطرق = $^{٧}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠
(ب) عدد الطرق = |ن−١ = |٩−١ = |٨ = ٤٠٣٢٠
(ج) عدد الطرق = $^{١٠}ل_{٣}$ = ٧٢٠

(٢) (أ) $^{٥}ل_{٢}$ = ٢٠
(ب) $٥^{٢}$ = ٢٥
(ج) $^{٥}ل_{٣}$ = ٦٠
(ى) = ٢ × $^{٤}ل_{٢}$ = ٢٤ (لأن المئات له اختيارين فقط)
(هـ) = ١ × $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤ (لأن الآحاد له اختيار واحد فقط)

(٣) (أ) $^{٦}ل_{١}$ = ٦
(ب) $^{٦}ل_{٢}$ = ٣٠

(٤) ∵ $^{م−ن}ل_{٢}$ = ٤٢ ∴ (م − ن) (م − ن − ١) = ٧ × ٦
∴ م − ن = ٧ ولكن م + ن = ١١
بحل المعادلتين معاً : ∴ م = ٩ ، ن = ٢ ∴ $^{م}ل_{ن} = {}^{٩}ل_{٢}$ = ٧٢

(٥) نحلل ١٢٠ تحليل مضروب :
∴ ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = |٥ = |ر ⇐ ر = ٥
∵ $^{ن}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠ (نوجد الجذر الخامس لـ ٢٥٢٠ نجده تقريباً = ٥)
∴ $^{ن}ل_{٥}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = $^{٧}ل_{٥}$ ⇐ ن = ٧
∴ |٣ر−٢ن = |١٥−١٤ = |١ = ١

١٢٠ ٢
٦٠ | ٣
٢٠ | ٤
٥ | ٥
١ |

(٦) ∵ $^{ن}ل_{١٥} > {}^{ن}ل_{١٤}$ ∴ $\frac{ن!}{(ن-١٥)!} > \frac{ن!}{(ن-١٤)!}$

∴ $(ن-١٤)! = (ن-١٥)!$ ∴ $(ن-١٤)\,(ن-١٥)! = (ن-١٥)!$

∴ ن − ١٤ > ١ ∴ ن > ١٥ ∴ ن = ١٦، ١٧، ١٨، .... ∴ أقل قيمة لـ ن = ١٦

(٧) عدد اللوحات = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٩ × ٨ × ٧ = ٩٩٠٦٦٢٤

حيث أن عدد الحروف الأبجدية كلها = ٢٨ حرف

، وكذلك عدد الأرقام غير الصفر = ٩ أرقام .

تمارين (٨)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) $^{٥}ق_{٣} = ١٠$

(٢) $^{٦}ق_{٤} = ١٥$

(٣) $^{٥}ق_{١} \times {}^{٣}ق_{١} = ١٥$

(٤) ∵ $^{ن}ق_{١٠} > {}^{ن}ق_{٩}$ ∴ $\frac{ن!}{١٠!\,(ن-١٠)!} > \frac{ن!}{٩!\,(ن-٩)!}$

∴ $\frac{١}{١٠\,٩!\,(ن-١٠)!} > \frac{١}{٩! \times (ن-٩)(ن-١٠)!}$ ∴ ن − ٩ > ١٠ ∴ ن > ١٩

(٥) الطرف الأيمن = $(١+١)^{٤} = ٢^{٤}$ ∴ $٢^{ن} = ٢^{٤}$ ⇐ ن = ٤

(٦) عدد المثلثات = $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠ مثلثات

(٧) ل ∈ $ص^{+}$

(٨) ١٠ ≠ ١٤ ⇐ ن = ١٠ + ١٤ ∴ ن = ٢٤ ∴ $^{٢٥}ق_{ن} = {}^{٢٥}ق_{٢٤} = ٢٥$

(٩) $٣٣٦ = ٨ \times ٧ \times ٦ = {}^{٨}ل_{٣}$

٣٣٦	٨
٤٢	٧
٦	٦
١	

∴ $^{٨}ل_{ر+١} = {}^{٨}ل_{٣}$ ⇐ ر + ١ = ٣ ∴ ر = ٢

∴ $^{٢ر}ق_{٤} = {}^{٤}ق_{٤} = ١$

(١٠) ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥!

١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

∴ $(٣ن-٧)! = ٥!$ ∴ ٣ن − ٧ = ٥ ∴ ٣ن = ١٢ ⇐ ن = ٤

∴ $^{ن}ق_{ن-١} = {}^{ن}ق_{١} = ن = ٤$

(١١) ∵ $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{٣!} = ١٢٠$ ∴ $^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨$

∴ $^{ن}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$ ⇐ ن = ١٠ ∴ $^{ن}ق_{ن-٩} = {}^{١٠}ق_{١} = ١٠$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) $\frac{(ن+١)!}{٤!\,(ن-٣)!} = \frac{٥}{٢} \cdot \frac{ن!}{٣!\,(ن-٣)!}$

∴ $\frac{(ن+١)\,ن!}{٤\,٣!\,(ن-٣)!} = \frac{٥\,ن!}{٢\,٣!\,(ن-٣)!}$ ⇐ $\frac{ن+١}{٢} = ٥$

∴ ن + ١ = ١٠ ⇐ ن = ٩

(ب) $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣!} = \frac{٩١ن}{٣}$ ∴ $(ن-١)(ن-٢) = \frac{٩١}{٣} \times ٣! = ١٨٢$

∴ (ن − ١)(ن − ٢) = ١٤ × ١٣ ⇐ ن − ١ = ١٤ ∴ ن = ١٥

(جـ) $^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{٢} = ٢٨$ ∴ ن(ن − ١) = ٢٨ × ٢! = ٥٦

∴ ن(ن − ١) = ٨ × ٧ ⇐ ن = ٨

(د) إما ٢ن − ٢١ = ٣ ⇐ ٢ن = ٢٤ ∴ ن = ١٢

أو : ٢ن − ٢١ + ٣ = ن ⇐ ن = ١٨ ∴ ن ∈ {١٢، ١٨}

(٢) $^{ن}ق_{ر-١} = ٥٦$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{ر-١}}{(ر-١)!} = ٥٦$ ∴ $\frac{٦٧٢٠}{(ر-١)!} = ٥٦$

∴ $(ر-١)! = ١٢٠$ ∴ $(ر-١)! = ٥!$ ⇐ ر − ١ = ٥ ∴ ر = ٦

، ∵ $^{ن}ل_{٥} = ٦٧٢٠ = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٨}ل_{٥}$ ∴ ن = ٨

(٣) $٢١٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣} = {}^{ن-م}ل_{٣}$ ⇐ ن − م = ٧ .... (١)

، $\frac{^{ن+م}ل_{٤}}{٤!} = ٧١٥$ ⇐ $^{ن+م}ل_{٤} = ٧١٥ \times ٤! = ١٧١٦٠ = ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠$

$= {}^{١٣}ل_{٤}$ ⇐ ن + م = ١٣ .... (٢) ، بحل المعادلتين : ∴ ن = ١٠ ، م = ٣

(٤) $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ر}$ ∴ $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$

∴ ر! = ١٢٠ = ٥! ∴ ر = ٥

(٥) الأغلبية تأتى من ٥ أعضاء أو ٤ أعضاء أو ٣ أعضاء

∴ عدد الطرق = $^{٥}ق_{٥} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٣}$ = ١٠ طرق

(٦) ن(ص) = $^{٦}ل_{٢}$ = ٣٠ ، ن(ع) = $^{٦}ق_{٣}$ = ٢٠

تمارين (٩)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) هـ = $س_{٢} - س_{١}$ = ٣,٢ − ٣ = ٠,٢ ∴ التغير فى د = ٢,٤ × ٠,٢ = ٠,٤٨

(٢) ∵ $٥ = \frac{د(٤) - د(٢)}{٤-٢}$ ∴ ١٠ = د(٤) − ٦ ⇐ د(٤) = ١٦

(٣) $ع = ل^{٣}$ ∴ $م(هـ) = \frac{د(٧) - د(٥)}{٧-٥} = \frac{(٧)^{٣} - (٥)^{٣}}{٢} = ١٠٩$

(٤) متوسط التغير = $\frac{د(٣) - د(١)}{٣-١} = \frac{(٩+٩+٥) - (١+٣+٥)}{٢} = ٧$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) $د(٣+هـ) = (٣+هـ)^{٢} - (٣+هـ) + ١ = ٩ + ٦هـ + هـ^{٢} - ٣ - هـ + ١$

$= هـ^{٢} + ٥هـ + ٧$ ، د(٣) = ٩ − ٣ + ١ = ٧ بالطرح

∴ $ت(هـ) = هـ^{٢} + ٥هـ = هـ(هـ+٥)$ ، ت(٠,٢) = ٠,٢(٠,٢ + ٥) = ١,٠٤

، ت(−٠,٣) = −٠,٣(−٠,٣ + ٥) = −١,٤١

(٢) $د(٢+هـ) = (٢+هـ)^{٢} + ٣(٢+هـ) - ١ = ٤ + ٤هـ + هـ^{٢} + ٦ + ٣هـ - ١ = هـ^{٢} + ٧هـ + ٩$ ، د(٢) = ٤ + ٦ − ١ = ٩ بالطرح ∴ $ت(هـ) = هـ^{٢} + ٧هـ = هـ(هـ+٧)$

(أ) دالة متوسط التغير = هـ + ٧ ، م(٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢

(ب) $م(١,٥) = \frac{د(٤,٥) - د(٣)}{٤,٥ - ٣}$

$= \frac{[(٤,٥)^{٢} + ٣(٤,٥) - ١] - [(٣)^{٢} + ٣(٣) - ١]}{١,٥} = ١٠,٥$

(٣) $د(س_{١}+هـ) = (س_{١}+هـ)^{٢} - ٢(س_{١}+هـ) + ٣$

$= \text{س}_1^2 + 2\text{س}_1\text{هـ} + \text{هـ}^2 - 2\text{س}_1 - 2\text{هـ} + 3$ ، $\text{د}(\text{س}_1) = \text{س}_1^2 - 2\text{س}_1 + 3$ بالطرح

∴ $\text{ت}(\text{هـ}) = \text{هـ}^2 + 2\text{س}_1\text{هـ} - 2\text{هـ} = \text{هـ}(\text{هـ} + 2\text{س}_1 - 2)$

∴ $\text{م}(\text{هـ}) = \text{هـ} + 2\text{س}_1 - 2$

(أ) $\text{هـ} = -1{,}9 + 2 = 0{,}1$ ، $\text{س}_1 = -2$

∴ متوسط التغير $= 0{,}1 + 2(-2) - 2 = -5{,}9$

(ب) معدل التغير عند $\text{س}_1 = 3$ هو $2(3) - 2 = 4$

(٤) $\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) =$ ∴ $\text{ت}(\text{هـ}) = \text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1) = \frac{1}{\text{س}_1+\text{هـ}} - \frac{1}{\text{س}_1}$

$= \frac{\text{س}_1 - \text{س}_1 - \text{هـ}}{\text{س}_1(\text{س}_1+\text{هـ})} = \frac{-\text{هـ}}{\text{س}_1(\text{س}_1+\text{هـ})}$ ، $\text{م}(\text{هـ}) = \frac{-1}{\text{س}_1(\text{س}_1+\text{هـ})}$

∴ معدل التغير $= \frac{-1}{\text{س}_1^2}$ ، عند $\text{س} = \sqrt{3}$ ∴ معدل التغير $= -\frac{1}{3}$

(٥) $\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) = \sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} + 3}$ ، $\text{د}(\text{س}_1) = \sqrt{\text{س}_1 + 3}$ بالطرح

∴ $\text{ت}(\text{هـ}) = \sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} + 3} - \sqrt{\text{س}_1 + 3}$ ، $\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\sqrt{\text{س}_1+\text{هـ}+3} - \sqrt{\text{س}_1+3}}{\text{هـ}}$

(أ) $\text{هـ} = 6{,}61 - 6 = 0{,}61$ ، $\text{س}_1 = 6$

∴ $\text{م}(0{,}61) = \frac{\sqrt{6+0{,}61+3} - \sqrt{6+3}}{0{,}61} = \frac{10}{61}$

(ب)

معدل التغير $= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س}_1+\text{هـ}+3} - \sqrt{\text{س}_1+3}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{س}_1+\text{هـ}+3} + \sqrt{\text{س}_1+3}}{\sqrt{\text{س}_1+\text{هـ}+3} + \sqrt{\text{س}_1+3}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{س}_1+\text{هـ}+3-\text{س}_1-3}{\text{هـ}(\sqrt{\text{س}_1+\text{هـ}+3} + \sqrt{\text{س}_1+3})} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{1}{\sqrt{\text{س}_1+\text{هـ}+3} + \sqrt{\text{س}_1+3}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\text{س}_1+3}}$ ، عند $\text{س} = 22$ ⇐ معدل التغير $= \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$

(٦) بفرض طول حرف المكعب = س سم ∴ مساحته الكلية $= 6\text{س}^2$

∴ متوسط التغير في المساحة $= \frac{\text{د}(6{,}3) - \text{د}(6)}{6{,}3 - 6} = \frac{6(6{,}3)^2 - 6(6)^2}{0{,}3} = 73{,}8$

، حجم المكعب $= \text{س}^3$ ∴ معدل التغير في الحجم $= 3\text{س}^2$ ، عند $\text{س} = 8$ ⇐

معدل التغير في الحجم $= 3(8)^2 = 192$

(٧) حجم الكرة $= \frac{4}{3}\pi \text{نق}^3$ ∴ معدل التغير $= \frac{4}{3} \times 3\pi \text{نق}^2 = 4\pi \text{نق}^2$

، عند نق = ٧ ⇐ معدل التغير $= 4\pi \times 49 = 196\pi$

تمارين (١٠)

(١) (أ) $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{5(\text{س}+\text{هـ}) + 2 - (5\text{س}+2)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{5\text{س} + 5\text{هـ} + 2 - 5\text{س} - 2}{\text{هـ}} = 5$

(ب) $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{3(\text{س}+\text{هـ})^2 - 3\text{س}^2}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{3\text{س}^2 + 6\text{س}\text{هـ} + 3\text{هـ}^2 - 3\text{س}^2}{\text{هـ}} = 6\text{س}$

(٢) (أ) $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\frac{1}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{1}{\text{س}}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{1}{\text{هـ}} \left(\frac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} \right)$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{-1}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} = \frac{-1}{\text{س}^2}$ (الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠)

(ب) $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{1}{\text{هـ}} \left(\frac{3}{2(\text{س}+\text{هـ}) - 5} - \frac{3}{2\text{س} - 5} \right)$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{1}{\text{هـ}} \left(\frac{3(2\text{س} - 5 - 2\text{س} - 2\text{هـ} + 5)}{(2\text{س}-5)(2\text{س}+2\text{هـ}-5)} \right)$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{-6}{(2\text{س}-5)(2\text{س}+2\text{هـ}-5)} = \frac{-6}{(2\text{س}-5)^2}$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $\text{س} = \frac{5}{2}$ أي عند المقام = صفر

(٣) $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{3(\text{س}+\text{هـ})^2 - 8 - 3\text{س}^2 + 8}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{3\text{س}^2 + 6\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^2 - 3\text{س}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} (6\text{س} + \text{هـ}) = 6\text{س}$

، عند س = ٢ ∴ ميل المماس $= 6 \times 2 = 12$ ⇐ ظاهـ = ١٢ ∴ هـ = ٨٥° ١٤′

(٤) (أ) $\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{أ}(\text{س}+\text{هـ})^2 + \text{ب} - \text{أ}\text{س}^2 - \text{ب}}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{أ}\text{س}^2 + 2\text{أ}\text{س}\text{هـ} + \text{أ}\text{هـ}^2 - \text{أ}\text{س}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} (2\text{أ}\text{س} + \text{أ}\text{هـ}) = 2\text{أ}\text{س}$

(ب) ∵ ميل المماس عند س = ٢ هو ١٢ ⇐ $2\text{أ} \times 2 = 12$ ∴ أ = ٣

، ∵ $(2 ، -3) \in \text{د}(\text{س}) = 3\text{س}^2 + \text{ب}$ ∴ $3(2)^2 + \text{ب} = -3$ ∴ ب = −١٥

تمارين (١١)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) معدل التغير $= 3\text{س}^2$ ، عندما س = ٢ يساوي $3(2)^2 = 12$

(٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3 - 3\text{س}^2$ ، عند س = ٠ ∴ ميل المماس $= 3 - 3(0)^2 = 3$

(٣) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 8$ ، بوضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$ صفر ⇐ س = ٤

(٤) $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)$ للمستقيم = −١ ، $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)$ للمنحنى $= 6\text{س} + 5$

، ∵ المستقيم // المنحنى ∴ $6\text{س} + 5 = -1$ ⇐ س = −١

(٥) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$ ، عند $\text{س} = \frac{1}{2}$ ⇐ ظاهـ = ١ ∴ هـ $= 45° = \frac{\pi}{4}$

(٦) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5(2\text{س} - 3)^4 \times 2$ ، عند س = ٢ ∴ ميل المماس $= 10 \times 1 = 10$

(٧) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{2}{3}}$ ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{-1}{3}}$ ، عند س = ١ ∴ ميل المماس $= \frac{2}{3}$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) 18س^5 (ب) $-4\pi\text{س}^{-5}$

(جـ) $\text{ص} = \frac{3}{2}\text{س}^{-2}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3}{2} \times -2\text{س}^{-3} = -3\text{س}^{-3}$

(د) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}$

(هـ) $\text{ص} = \text{س}^1 \times \text{س}^{\frac{1}{2}} = \text{س}^{\frac{3}{2}}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\text{س}}$

(و) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{5}{3}}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{5}{3}\text{س}^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\text{س}^2}$

(٢) (أ) $\text{ص}' = 15\text{س}^2 + 6\text{س} - 4$

(ب) $\text{ص}' = 12\text{س}^5 - 9\text{س}^{-10}$

(جـ) $\text{ص}' = \frac{1}{2} \times 4\text{س}^3 - \frac{2}{3} \times 3\text{س}^2 + 7 = 2\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 7$

(ء) $ص' = ٦س^٢ + \frac{٣}{س^٢} + \frac{٢}{س^٣}$

(هـ) $ص = ٣س^٣ - ٢س^٢ + ١٢س$ ∴ $ص' = ٩س^٢ - ٤س + ١٢$

(٣) (أ) $ص' = ١٢س^٥ + \frac{٣}{٢\sqrt{س}}$

(ب) $ص = ١ - ٢\sqrt{س}$ ∴ $ص' = -\frac{١}{\sqrt{س}}$

(جـ) $ص' = ٢س(س^٣ + ٣) + ٣س^٢(س^٢ + ١)$ ، عند $س = -١$

∴ $ص' = ٢(-١)(-١ + ٣) + ٣(-١)^٢(١ + ١) = ٢$

(ء) $ص = س^٤ + س^{\frac{٥}{٢}} - ٢س$

∴ $ص' = ٤س^٣ + \frac{٥}{٢}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ = ٤س^٣ + س\sqrt{س} - ٢$

(هـ) $ص' = \frac{٢(١ - ٤س) + ٤(٢س + ٥)}{(١ - ٤س)^٢} = \frac{٢٢}{(١ - ٤س)^٢}$

(و) $ص' = \frac{٢س(س^٣ + ١) - ٣س^٢(س^٢ - ١)}{(س^٣ + ١)^٢} = \frac{٢س^٤ + ٢س - ٣س^٤ + ٣س^٢}{(س^٣ + ١)^٢}$

$= \frac{-س^٤ + ٣س^٢ + ٢س}{(س^٣ + ١)^٢}$

(٤) (أ) صفر (لأنه ثابت)

(ب) $ص' = \sqrt{٢} \times ٧س^٦ - \frac{١}{٥} \times ٥س^٤ + ٠ = ٧\sqrt{٢}س^٦ - س^٤$

(٥) ∵ $د(١) = ٢$ ∴ $٤أ + ب = ٢$ .... (١) ، $د'(س) = ٢أس + ب$

، ∵ $د'(١) = ٠$ ∴ $٢أ + ب = ٠$ .... (٢)

، بحل المعادلتين معاً ∴ $أ = ١$ ، $ب = -٢$

(٦) (أ) $ص = (س^٣ + ١)^٥$

⇐ $\frac{ءص}{ءس} = ٥(س^٣ + ١)^٤ \times ٣س^٢ = ١٥س^٢(س^٣ + ١)^٤$

(ب) $ص = (س^٤ - ٦)^٢$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس} = ٢(س^٤ - ٦) \times ٤س^٣ = ٨س^٣(س^٤ - ٦)$

(جـ) $ص = (٣س^٢ - ٢)^٢$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢(٣س^٢ - ٢) \times ٦س = ١٢س(٣س^٢ - ٢)$

، عند $س = ٢$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١٢ \times ٢(٣ \times ٤ - ٢) = ٢٤٠$

(ء) $ص' = ٥(١ - ٣س)^٤ \times -٣ = -١٥(١ - ٣س)^٤$

(هـ) $ص' = ٩(٢س^٣ - ٤س + ١)^٨(٦س - ٤)$

(و) $ص' = ١٠(٩س^٣ + ٣س + ١)^٩(٢٧س^٢ + ٣)$

$= ٣٠(٩س^٣ + ٣س + ١)^٩(٩س^٢ + ١)$

(٧) (أ) $\frac{ءص}{ءع} = ٢١ع^٢$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{(١ + س) \times ١ + (١ - س) \times ١}{(١ - س)^٢} = \frac{٢}{(١ - س)^٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٢١ع^٢ \times \frac{٢}{(١ - س)^٢} = ٢١ \times \frac{(١ + س)^٢}{(١ - س)^٢} \times \frac{٢}{(١ - س)^٢}$

$= \frac{٤٢(١ + س)^٢}{(١ - س)^٤}$

(ب) $ص' = -٤(س^٢ - س + ١)^{-٤-١} \times (٢س - ١)$ ، عند $س = ١$

∴ $ص' = -٤(١ - ١ + ١)^{-٥}(٢ - ١) = -٤$

(جـ) $ص' = ٧\left(\frac{س^٢ - ٢}{٣ - س^٢}\right)^٦ \times \frac{٢س \times (٣ - س^٢) + ٢س \times (س^٢ - ٢)}{(٣ - س^٢)^٢}$

، عند $س = ٠$ ∴ $ص' = ٧\left(\frac{-٢}{٣}\right)^٦ \times$ صفر = صفر

(ء) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س :

∴ $٣ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٦س$ ⇐ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٦س}{٣ص^٢} = \frac{٢س}{ص^٢}$

(٨) $د'(س) = ٧(س - ٥)^٦ = ٧$ ∴ $س - ٥ = \pm ١$

$س - ٥ = ١$ ⇐ $س = ٦$ ، $س - ٥ = -١$ ⇐ $س = ٤$ ∴ $س \in \{٤ ، ٦\}$

(٩) $ص = (٢س^٣ - ٤س + ٧)^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $ص' = \frac{٢}{٣}(٢س^٣ - ٤س + ٧)^{\frac{-١}{٣}}(٦س^٢ - ٤)$

∴ $ص' = \frac{٤(٣س^٢ - ٢)}{٣\sqrt[٣]{٢س^٣ - ٤س + ٧}}$

(١٠) (أ) $ص' = ٣س^٢ + ٢س - ١$ ، عند $س = -١$

∴ ميل المماس = $٣ - ٢ - ١$ = صفر (المماس // محور السينات)

، ميل العمودى = غير معرّف (المماس // محور الصادات)

(ب) $ص' = ١ + \frac{١}{س^٢}$ ، عند $س = ١$

∴ ميل المماس = $١ + ١ = ٢$ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

(جـ) $ص' = \frac{-١}{(س - ٣)^٢}$ ، عند $س = ٢$

∴ ميل المماس = -١ ، ميل العمودى = ١

(١١) (أ) $ص' = ٣س^٢ - ٢س$ ، عند $س = ١$ ∴ ظاهـ = $٣ - ٢ = ١$

∴ $هـ = ٤٥° = \frac{\pi}{٤}$

(ب) $ص = ٢س^٢ - س - ١$ ⇐ $ص' = ٤س - ١$ ، عند $س = ٠$

∴ ظاهـ = -١ ∴ $هـ = ١٣٥° = \frac{٣\pi}{٤}$

(جـ) $ص = س(س^٢ - ١) = س^٣ - س$ ⇐ $ص' = ٣س^٢ - ١$

، عند $س = ٠$ ∴ ظاهـ = -١ ∴ $هـ = ١٣٥° = \frac{٣\pi}{٤}$

(ء) $ص' = ٢س - \frac{١}{س^٢}$ ، عند $س = ١$ ∴ ظاهـ = $٢ - ١ = ١$ ∴ $هـ = ٤٥°$

(١٢) ∵ $ص = س^٣ - ٣س^٢$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - ٦س$

(أ) ∵ المماس // محور السينات ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر ∴ $٣س(س - ٢) = ٠$

∴ $س = ٠$ أ، $س = ٢$ وبالتعويض فى معادلة المنحنى الأصلية

∴ $ص = ٠$ أ، $ص = -٤$ ∴ النقط هى : (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٤)

(ب) ميل المستقيم = $-\frac{١}{٩}$ ∴ ميل المماس العمودى على المستقيم = ٩

∴ $٣س^٢ - ٦س = ٩$ ∴ $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ ∴ $س = ٣$ أ، $س = -١$

وبالتعويض فى معادلة المنحنى الأصلية ∴ $ص = ٠$ أ، $ص = -٤$

∴ النقط هى : (٠ ، ٠) ، (−١ ، −٤)

(١٣) (أ) $ص' = ٤س - ٥$ ، عند $س = ٢$ ∴ ميل المماس = $٨ - ٥ = ٣$

ولإيجاد نقطة التماس نعوض فى معادلة المنحنى الأصلية عن $س = ٢$ ⇐

$ص = ٢(٢)^٢ - ٥(٢) + ١$ ⇐ $ص = -١$ ∴ نقطة التماس هى : (٢ ، −١)

∴ معادلة المماس هى : $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ أى : $ص + ١ = ٣(س - ٢)$

أى : $٣س - ص - ٧ = ٠$

، معادلة العمودى هى : $ص + ١ = \frac{-١}{٥}(س - ٢)$ أى : $٥ص + ٥ = -س + ٢$

أى : $س + ٥ص + ٣ = ٠$

(ب) بالتعويض عندما $س = -٢$ ∴ $ص = (-٢)^٣ + (-٢)^٢ - ١ = -٥$

∴ نقطة التماس هى : $(-٢ ، -٥)$ ، $ص' = ٣ س^{٢} + ٢ س$ ، عند $س = -٢$

∴ ميل المماس $= ٣ (-٢)^{٢} + ٢ (-٢) = ٨$

∴ معادلة المماس هى : $ص + ٥ = ٨ (س + ٢)$ أى : $٨ س - ص + ١١ = ٠$

، معادلة العمودى هى : $ص + ٥ = \frac{-١}{٨} (س + ٢)$ أى : $٨ ص + ٤٠ = - س - ٢$

أى : $س + ٨ ص + ٤٢ = ٠$

(جـ) بالتعويض عن $س = ٢$ ∴ $ص = (٩ - ٥)^{٧} = ١$ ∴ نقطة التماس $(٢ ، ١)$

، $ص' = ٧ (٣ س - ٥)^{٦} × ٣ = ٢١ (٣ س - ٥)^{٦}$

، عند $س = ٢$ ∴ ميل المماس $= ٢١ (٦ - ٥)^{٦} = ٢١$

∴ معادلة المماس هى : $ص - ١ = ٢١ (س - ٢)$ أى : $٢١ س - ص - ٤١ = ٠$ ،

معادلة العمودى هى : $ص - ١ = \frac{-١}{٢١} (س - ٢)$

بالضرب × ٢١ ∴ $٢١ ص - ٢١ = - س + ٢$ أى : $س + ٢١ ص - ١٩ = ٠$

(ء) $ص' = \frac{١}{٢ \sqrt{س + ٧}}$ ، عند $س = ٢$ ∴ ميل المماس $= \frac{١}{٢ \sqrt{٢ + ٧}} = \frac{١}{٦}$

∴ معادلة المماس هى : $ص - ٣ = \frac{١}{٦} (س - ٢)$

أى : $٦ ص - ١٨ = س - ٢$ أى : $س - ٦ ص + ١٦ = ٠$

، معادلة العمودى هى : $ص - ٣ = - ٦ (س - ٢)$ أى : $٦ س + ص - ٩ = ٠$

(هـ) بالتعويض عن $س = ٤$ ∴ $ص = \frac{٣}{٢}$ ∴ نقطة التماس هى : $(٤ ، \frac{٣}{٢})$

، $ص' = \frac{-٣}{(س - ٢)^{٢}}$ ، عند $س = ٤$ ∴ ميل المماس $= \frac{-٣}{٤}$

∴ معادلة المماس هى : $ص - \frac{٣}{٢} = \frac{-٣}{٤} (س - ٤)$ بالضرب × ٤

أى : $٤ ص - ٦ = - ٣ س + ١٢$ أى : $٣ س + ٤ ص - ١٨ = ٠$

، معادلة العمودى هى : $ص - \frac{٣}{٢} = \frac{٤}{٣} (س - ٤)$

(١٤) $(١ ، ٣) \in$ المنحنى فهى تحقق معادلته

∴ $١ + ٢ + ب = ٣$ ∴ $٢ + ب = ٢$

، $ص' = ٢ س + ٢$ ، $د'(١) = ٥ \Leftarrow ٢ + ٢ = ٥$ ∴ $٢ = ٣$

ومن المعادلة الأولى ∴ $٣ + ب = ٢ \Leftarrow ب = -١$

(١٥) ميل المماس = ميل المستقيم = ٨ ، ∵ $(-١ ، -٣) \in$ المنحنى

∴ تحقق معادلته ∴ $-٣ = -٢ + ب$ ∴ $٢ = ب + ٣$ .... (١)

، $ص' = ٣ ٢ س^{٢} + ٢ ب س$ ∴ $٨ = ٣ ٢ (-١)^{٢} + ٢ ب (-١)$

$\Leftarrow ٣ ٢ - ٢ ب = ٨$ .... (٢) بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $٣ (ب + ٣) - ٢ ب = ٨$ ∴ $ب = ٨ - ٩ = -١$ ومن (١) ∴ $٢ = ٢$

ملحوظة : يمكن حل المعادلتين باستخدام الآلة الحاسبة .

تمارين (١٢)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) المقدار $= \frac{١}{٣} س^{٣} - ٣ س + ث$

(٢) المقدار $= س + ث$

(٣) المقدار $= \frac{١}{٣} س + ث$

(٤) المقدار $= \int (س^{٢} + ٢ س) ء س = \frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} + ث$

(٥) المقدار $= ٢ ف + ث$

(٦) المقدار $= ٥ ﻫ - ﻫ^{٢} + ث$

(٧) المقدار $= \int (س^{٢} - ١) ء س = \frac{١}{٣} س^{٣} - س + ث$

(٨) المقدار $= \int (٤ س^{٢} - ١) ء س = \frac{٤}{٣} س^{٣} - س + ث$

(٩) المقدار $= \int \frac{٢ س (٢ س - ٣)}{(٢ س - ٣)} ء س = \int ٢ س ء س = س^{٢} + ث$

(١٠) المقدار $= \int \frac{٢ (٢ س - ٣)}{(٢ س - ٣)} ء س = ٢ ء س = ٢ س + ث$

(١١) $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢}$

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

(١) (أ) المقدار $= ٨ \int س^{-٥} ء س = ٨ × \frac{س^{-٤}}{-٤} + ث = - ٢ س^{-٤} + ث$

(ب) المقدار $= - \frac{٨}{٥} × \frac{١}{-٢} س^{-٢} + ث = \frac{٤}{٥} س^{-٢} + ث$

(جـ) المقدار $= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ث$

(ء) المقدار $= \int س^{\frac{٥}{٧}} ء س = \frac{٧}{١٢} س^{\frac{١٢}{٧}} + ث = \frac{٧}{١٢} \sqrt[٧]{س^{١٢}} + ث$

(هـ) المقدار $= ٧ \int س^{\frac{-٣}{٥}} ء س = ٧ × \frac{٥}{٢} س^{\frac{٢}{٥}} + ث = \frac{٣٥}{٢} \sqrt[٥]{س^{٢}} + ث$

(٢) (أ) المقدار $= س^{٣} + س^{٢} - س + ث$

(ب) المقدار $= \frac{١}{٤} ﻫ^{٤} - \frac{٦}{٥} ﻫ^{٥} + ث$

(جـ) المقدار $= \frac{١}{٣} ٢ س^{٣} - \frac{١}{٢} ب س^{٢} + جـ س + ث$

(ء) المقدار $= \int (٢ ص^{-٣} - ٤ ص^{-٥}) ء ص = - ص^{-٢} + ص^{-٤} - ٥ ص + ث$

$= \frac{-١}{ص^{٢}} + \frac{١}{ص^{٤}} - ٥ ص + ث$

(هـ) المقدار $= \int (\frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + ٢ س^{\frac{-١}{٢}}) ء س$

$= \frac{١}{٢} × \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ × ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ث = \frac{\sqrt{س^{٣}}}{٣} + ٤ \sqrt{س} + ث$

(٣) (أ) المقدار $= \int (٧ س^{٦} - ٧ س^{٢}) ء س = س^{٧} + \frac{٧}{٣} س^{٣} + ث$

(ب) المقدار $= \int (٢ س^{٣} + س) ء س = \frac{١}{٢} س^{٤} + \frac{١}{٢} س^{٢} + ث$

(جـ) المقدار $= \int (٢ س^{٢} + س - ٣) ء س = \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} - ٣ س + ث$

(ء) المقدار $= \int \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} ء س$

$= \int (س + ١) ء س = \frac{١}{٢} س^{٢} + س + ث$

(هـ) المقدار $= \int \frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢ س + ٤)}{(س^{٢} - ٢ س + ٤)} ء س$

$= \int (س + ٢) ء س = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س + ث$

(و) المقدار $= \int \frac{(س + ٢)(س - ٤)}{(س + ٢)} ء س$

$= \int (س - ٤) ء س = \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤ س + ث$

(٤) (أ) المقدار $= ٦ × \frac{١}{٦} (س - ٢)^{٦} + ث = (س - ٢)^{٦} + ث$

(ب) المقدار $= ٧ × \frac{١}{٢ × ٧} (٢ س - ٧)^{٧} + ث = \frac{١}{٢} (٢ س - ٧)^{٧} + ث$

(جـ) المقدار $= \frac{١}{٢ × -٢} (٢ س - ٧)^{-٢} + ث = \frac{-١}{٤} (٢ س - ٧)^{-٢} + ث$

(ء) المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١٠}$ (٢س − ٣)$^{\frac{١٠}{٣}}$ + ث = $\frac{٣}{٢٠}$ (٢س − ٣)$^{\frac{١٠}{٣}}$ + ث

(هـ) المقدار = ١٥ ∫ (٣س − ٢)$^{\frac{٥}{٢}}$ ءس = ١٥ × $\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٧}$ (٣س − ٢)$^{\frac{٧}{٢}}$ + ث

= $\frac{١٠}{٧}$ $\sqrt{(٣س - ٢)^{٧}}$ + ث

تمارين (١٣)

المجموعة الأولى : الأسئلة الموضوعية

(١) بفرض أ = {١، ٣} ⇐ ل(أ) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٢) بفرض أ = {(٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٥)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٥)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٥)} ⇐ ل(أ) = $\frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$

(٣) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء = $\frac{٣ + ٧}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

حل آخر : المطلوب احتمال أن تكون الكرة ليست حمراء = ١ − $\frac{٥}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

(٤) بفرض أ = {١، ٣، ٩، ٥، ٧} ⇐ ل(أ) = $\frac{٥}{٩}$

(٥) ل(أ) = ٠,٦ ، ٢ ل(ب) = ٠,٦ ⇐ ل(ب) = ٠,٣

∴ ل(أ − ب′) = ل(أ ∩ ب) = ل(ب) = ٠,٣ (لأن ب ⊂ أ)

ملحوظة : يمكنك عزيزى الطالب استنتاج أى قانون بواسطة رسم أشكال فن

(٦) أ = {(٥، ٦)} ⇐ ل(أ) = $\frac{١}{٣٦}$

(٧) أ = {(٥، ٦)، (٦، ٥)} ⇐ ل(أ) = $\frac{٢}{٣٦} = \frac{١}{١٨}$

(٨) أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

⇐ ل(أ) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٩) ف − (أ ∪ ب)

(١٠) أ ∩ ب

(١١) ف − (أ ∩ ب)

(١٢) (أ − ب) ∪ (ب − أ)

(١٣) أ ∩ ب = ∅

(١٤) أ − ب = أ

(١٥) ب − أ = ب

(١٦) أ ∩ ب = ب

(١٧) أ ∪ ب = أ

(١٨) ب − أ = ∅

(١٩) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٥ − ٠,١ = ٠,٧

(٢٠) ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٥ − ٠,١ = ٠,٤

(٢١) ل(أ′ ∩ ب′) = ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

(٢٢) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) (لأنهما متنافيان حيث : أ ∩ ب = ∅)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٣ + ٠,٦ = ٠,٩ (لأن ل(أ) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦)

المجموعة الثانية : الأسئلة المقالية

ح = حمراء ∴ ل(ح) = $\frac{٤}{١٥}$ ، ز = زرقاء ∴ ل(ز) = $\frac{٦}{١٥}$ ، ص = صفراء ∴ ل(ص) = $\frac{٥}{١٥}$

(أ) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = ل(ح) = $\frac{٤}{١٥}$

(ب) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو صفراء = ل(ز) + ل(ص)

= $\frac{٦}{١٥} + \frac{٥}{١٥} = \frac{١١}{١٥}$

(جـ) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست زرقاء = ل(ح) + ل(ص)

= $\frac{٤}{١٥} + \frac{٥}{١٥} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

(ء) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء ولا صفراء = ل(ز) = $\frac{٦}{١٥}$

(٢) (أ) أ = {٣، ٤، ٥، ٦} ⇐ ل(أ) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

(ب) ب = ∅ ⇐ ل(ب) = صفر

(جـ) جـ = {٣} ⇐ ل(جـ) = $\frac{١}{٦}$

(ء) د = {٢، ٣، ٥} ⇐ ل(د) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(هـ) هـ = {٤} ⇐ ل(هـ) = $\frac{١}{٦}$

(٣) (أ) أ = {(٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)}

∴ ن(أ) = ٦ ⇐ ل(أ) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(ب) ب = {(٢، ٦)، (٣، ٥)، (٤، ٤)، (٥، ٣)، (٦، ٢)}

∴ ن(ب) = ٥ ⇐ ل(ب) = $\frac{٥}{٣٦}$

(جـ) جـ = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٤، ١)} ∴ ن(جـ) = ١٠ ⇐ ل(جـ) = $\frac{١٠}{٣٦} = \frac{٥}{١٨}$

(ء) د = {(١، ٢)، (١، ٤)، (١، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٤)، (٣، ٦)، (٥، ٢)، (٥، ٤)، (٥، ٦)} ∴ ن(د) = ٩ ⇐ ل(د) = $\frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$

(٤) (أ) أ = {٢٣، ٣٣، ٤٣، ٥٣، ٦٣، ٢٥، ٣٥، ٤٥، ٥٥، ٦٥}

∴ ن(أ) = ١٠ ، ن(ف) = ٥٢ = ٢٥ ⇐ ل(أ) = $\frac{١٠}{٢٥} = \frac{٢}{٥}$

(ب) ب = {٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦}

∴ ن(ب) = ١٠ ⇐ ل(ب) = $\frac{١٠}{٢٥} = \frac{٢}{٥}$

(جـ) ل(جـ) = ل(أ ∪ ب) = ل({٢٣، ٣٣، ٤٣، ٥٣، ٦٣، ٢٥، ٣٥، ٤٥، ٥٥، ٦٥، ٣٢، ٣٤، ٣٦، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٦}) = $\frac{١٧}{٢٥}$

(٥) (أ) ل(أ) = $\frac{٢٢}{٥٠} = \frac{١١}{٢٥}$

(ب) ل(ب) = $\frac{١٦}{٥٠} = \frac{٨}{٢٥}$

(جـ) ل(جـ) = $\frac{٢٠}{٥٠} + \frac{٢٨}{٥٠} = \frac{٢٤}{٢٥}$

(٦) (أولاً) ل(أ′) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

(ثانياً) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٨ − ٠,٢ = ٠,٩

(ثالثاً) ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ − ٠,٢ = ٠,١

(رابعاً) ل(أ′ ∪ ب′) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٢ = ٠,٨

(٧) ل(ب) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤ ، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

⇐ ٠,٨٥ = ٠,٧٥ + ٠,٤ − ل(أ ∩ ب) ∴ ل(أ ∩ ب) = ١,١٥ − ٠,٨٥ = ٠,٣

(أولاً) ل(أ ∩ ب) = ٠,٣

(ثانياً) ل (أ ∩ ب′) = ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧٥ − ٠,٣ = ٠,٤٥

(ثالثاً) ل (أ′ ∩ ب′) = ١ − ل (أ ∪ ب) = ١ − ٠,٨٥ = ٠,١٥

ملحوظة هامة جداً : خطة عمل :

في التمرين السابق (٦) نلاحظ أن المعطيات : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∩ ب) وهى العناصر الأساسية لتكوين أى قانون من قوانين الاحتمال ولذلك دخلنا مباشرة على المطلوب وعوضنا فيه . بينما في هذا التمرين (٧) نلاحظ وجود عنصر غير أساسى وهو العنصر ل (أ ∪ ب) ولذلك نحلل هذا العنصر للأستفادة منه والوصول إلى العنصر الأساسى الناقص (وهو ل (أ ∩ ب)) ثم بعد ذلك ندخل على المطلوب ونعوض فيه .

(٨) ل (أ′) = ٠,٤٥ ⇐ ل (أ) = ١ − ٠,٤٥ = ٠,٥٥

، ٣/٥ ل (أ ∪ ب) = ٠,٤٥ ∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٤٥ ÷ ٣/٥ = ٠,٧٥

∴ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧٥

∴ ٠,٥٥ + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧٥ ⇐ ل (ب) = ٠,٢ + ل (أ ∩ ب) ... (١)

(أولاً) ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ومن (١) ∴ ل (ب) = ٠,٢ − ٠ = ٠,٢

(ثانياً) أ ⊂ ب ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) = ٠,٥٥

ومن (١) ∴ ل (ب) = ٠,٢ + ٠,٥٥ = ٠,٧٥

(ثالثاً) ∵ ل (أ − ب) = ٠,٢ ∴ ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

∴ ٠,٥٥ − ٠,٢ = ل (أ ∩ ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٣٥

ومن (١) ∴ ل (ب) = ٠,٢ + ٠,٣٥ = ٠,٥٥

(٩) ∵ ل (أ ∪ ب)′ = ١/٣ ∴ ل (أ ∪ ب) = ١ − ١/٣ = ٢/٣

∴ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٢/٣ ∴ ١/٢ + س − ل (أ ∩ ب) = ٢/٣

∴ س = ل (أ ∩ ب) + ٢/٣ − ١/٢ ∴ س = ل (أ ∩ ب) + ١/٦ .... (١)

(أولاً) (١) ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠

بالتعويض فى (١) ∴ س = ١/٦

(٢) ∵ أ ⊂ ب ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) = ١/٢

ومن (١) ∴ س = ١/٢ + ١/٦ = ٢/٣

(ثانياً) من (١) بوضع س = ١/٤ ∴ ١/٤ = ل (أ ∩ ب) + ١/٦

⇐ ل (أ ∩ ب) = ١/٤ − ١/٦ = ١/١٢

(١٠) ∵ ل (أ − ب) = ٠,٢٤ ∴ ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٢٤ .... (١)

، ∵ ل (ب ∩ أ′) = ٠,١٥ ∴ ل (ب − أ) = ٠,١٥

∴ ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,١٥ .... (٢) ، بطرح (١) − (٢) :

∴ ل (أ) − ل (ب) = ٠,٠٩ ∴ ل (أ) − ٤/٥ ل (أ) = ٠,٠٩ ∴ ١/٥ ل (أ) = ٠,٠٩

∴ ل (أ) = ٠,٤٥ ∴ ل (ب) = ٤/٥ × ٠,٤٥ = ٠,٦ وبالتعويض فى (١) :

∴ ٠,٤٥ − ل (أ ∩ ب) = ٠,٢٤ ⇐ ل (أ ∩ ب) = ٠,٤٥ − ٠,٢٤ = ٠,٢١

، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٤٥ + ٠,٦ − ٠,٢١ = ٠,٨٤

، ل (أ′ ∪ ب′) = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٢١ = ٠,٧٩

(١١) ∵ ل (أ¯) / ل (أ) = ٨/٣ ∴ (١ − ل (أ)) / ل (أ) = ٨/٣ ∴ ٨ ل (أ) = ٣ − ٣ ل (أ)

⇐ ل (أ) = ٣/١١ ، ∵ ل (ب¯) / ل (ب) = ٥/٢ ∴ ل (ب) = ٢/٧

، ∵ ل (أ) + ل (ب) + ل (ج) = ١ ∴ ٣/١١ + ٢/٧ + ل (ج) = ١

∴ ل (ج) = ١ − ٣/١١ − ٢/٧ = ٣٤/٧٧ ⇐ ل (ج′) = ١ − ٣٤/٧٧ = ٤٣/٧٧

∴ ل (ج¯) / ل (ج) = ٤٣/٧٧ ÷ ٣٤/٧٧ = ٤٣/٣٤

(١٢) ل (ف) = ١ ⇐ ل (أ) + ل (ب) + ل (ج) + ل (د) = ١

∴ ٣ ل (ب) + ل (ب) + ٧/١٨ + ٧/١٨ = ١ ∴ ٤ ل (ب) = ١ − ٧/٩ = ٢/٩

∴ ل (ب) = ٢/٩ ÷ ٤ = ١/١٨ ∴ ل (أ) = ٣ × ١/١٨ = ١/٦

(١٣) ∵ ٢٠ ل (أ) = ١٥ ل (ب) بالقسمة على ٢٠ ∴ ل (أ) = ٣/٤ ل (ب)

، ∵ ١٢ ل (ج) = ١٥ ل (ب) بالقسمة على ١٢ ∴ ل (ج) = ٥/٤ ل (ب)

، ∵ ل (ف) = ١ ⇐ ل (أ) + ل (ب) + ل (ج) = ١

∴ ٣/٤ ل (ب) + ل (ب) + ٥/٤ ل (ب) = ١ ⇐ ٣ ل (ب) = ١ ∴ ل (ب) = ١/٣

∴ ل (أ) = ٣/٤ × ١/٣ = ١/٤ ، ل (ج) = ٥/٤ × ١/٣ = ٥/١٢

(١٤) ل (أ′) = ١/٣ ل (أ) ⇐ ١ − ل (أ) = ١/٣ ل (أ) ∴ ١ = ٤/٣ ل (أ)

∴ ل (أ) = ٣/٤

، ∵ ل (أ′ ∪ ب′) = ٥/٨ ∴ ١ − ل (أ ∩ ب) = ٥/٨ ⇐ ل (أ ∩ ب) = ٣/٨

(أولاً) احتمال وقوع أ ، ب معاً = ل (أ ∩ ب) = ٣/٨

(ثانياً) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٣/٤ + ١/٢ − ٣/٨ = ٧/٨

(ثالثاً) احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ = ل (ب − أ)

= ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ١/٢ − ٣/٨ = ١/٨

(١٥) احتمال وقع أحدهما على الأكثر = ل (أ ∩ ب)′ = ٠,٧٥

∴ ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٧٥ = ٠,٢٥

، احتمال وقوع أحدهما على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ٠,٦

∴ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٦

∴ ٢/٣ ل (ب) + ل (ب) − ٠,٢٥ = ٠,٦ ∴ ٥/٣ ل (ب) = ٠,٦ + ٠,٢٥ = ٠,٨٥

∴ ل (ب) = ٠,٨٥ ÷ ٥/٣ = ٠,٥١ ∴ ل (أ) = ٢/٣ × ٠,٥١ = ٠,٣٤

(أولاً) احتمال وقوع الحدثين معاً = ل (أ ∩ ب) = ٠,٢٥

(ثانياً) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٦ − ٠,٢٥ = ٠,٣٥

(ثالثاً) احتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ = ل (ب ∪ أ′) = ل (أ − ب)′

= ١ − ل (أ − ب) = ١ − [ل (أ) − ل (أ ∩ ب)]

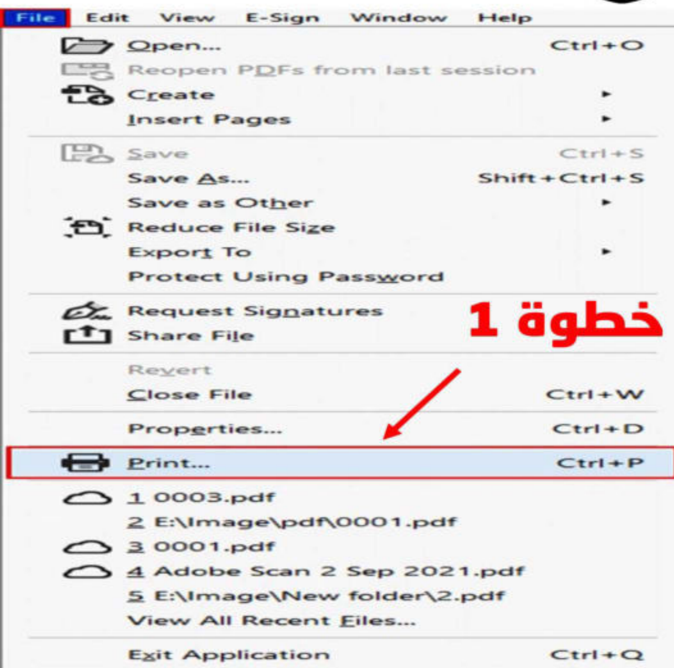
= ١ − (٠,٣٤ − ٠,٢٥) = ١ − ٠,٠٩ = ٠,٩١

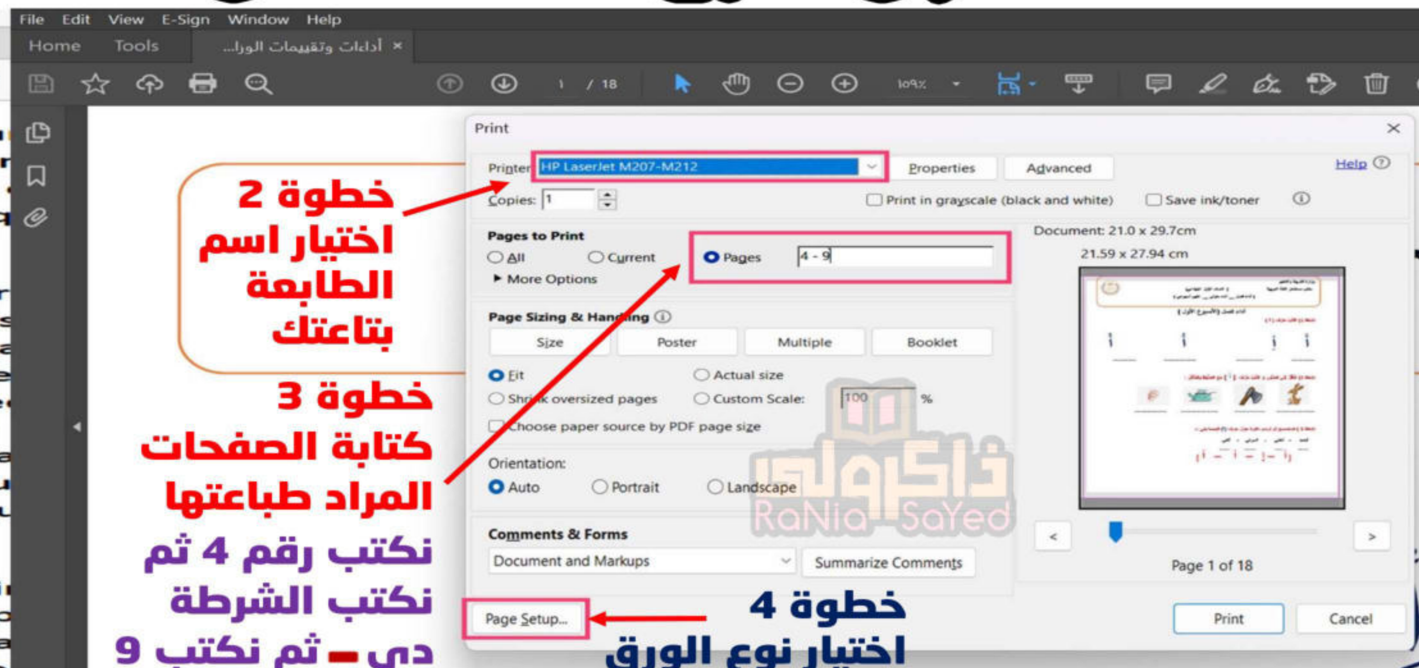
تم بحمد الله

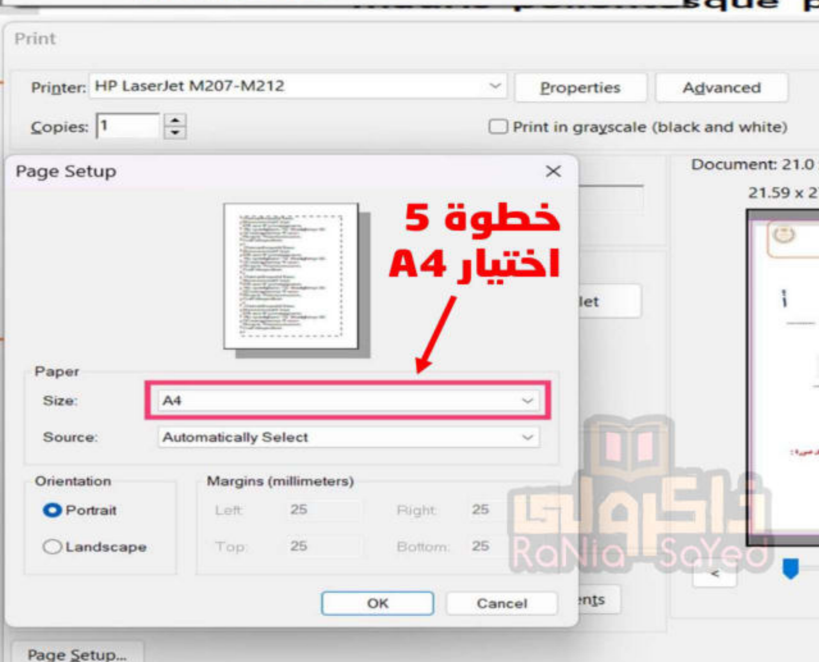
مع تحيات الأستاذ / علىّ الدين يحيى

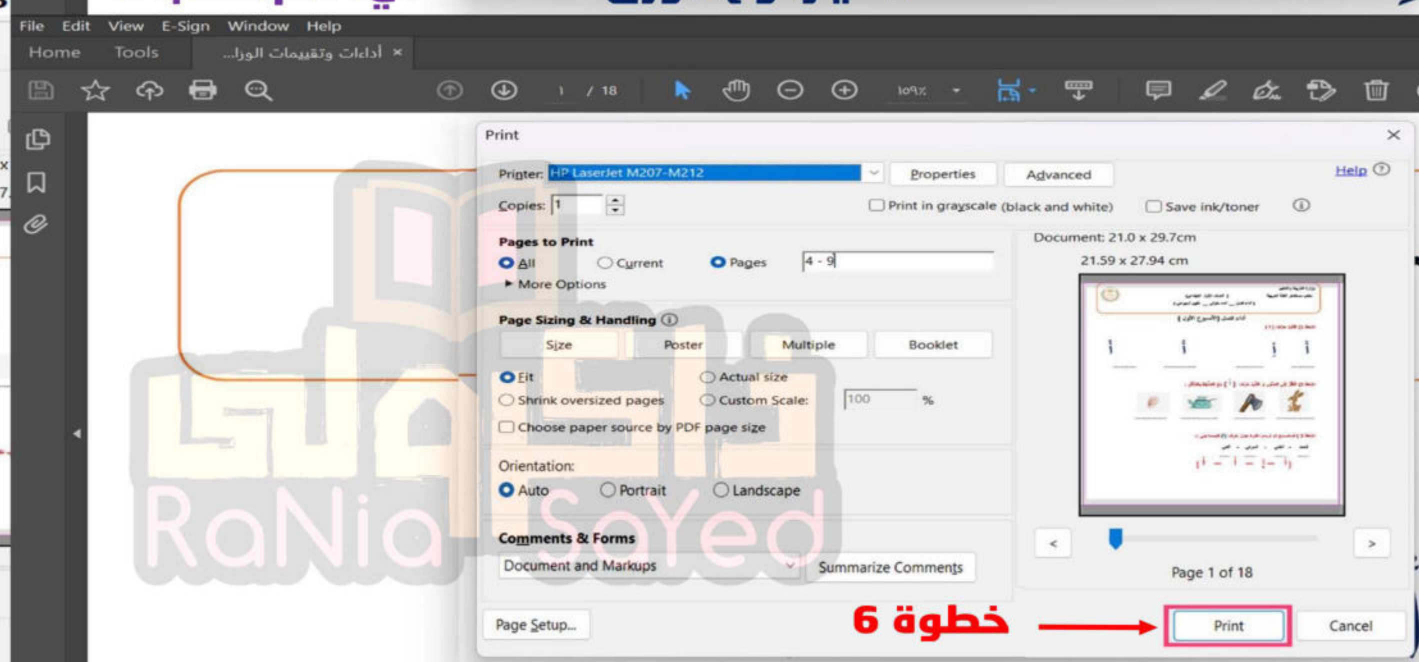
كيفية طباعة صفحات معينة من ملف معين

مثلا ازاى نطبع الصفحات من صفحة 4 الى صفحة 9









امتحانات رقم (1)

الترم الثانى







١ محافظة القاهرة — إدارة الوايلى — توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=١}^{٤} ٢ = $ ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٢٠

② الحد السابع فى المتتابعة الحسابية (٣ ، ٦ ، ٩ ، ....) هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ٢١ (جـ) ٣٠ (د) ٢٧

③ الحد الأوسط فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، .... ، ١٢٨) هو ....

(أ) $ح_{٢٢}$ (ب) $ح_{٢٣}$ (جـ) $ح_{٤٣}$ (د) $ح_{١٣}$

④ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية (٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢) = ...

(أ) ٦٧٠ (ب) ٦٧٢ (جـ) ٦٥٠ (د) ٦٦٤

⑤ الحد الذى قيمته $\frac{١}{٨١}$ من المتتابعة الهندسية (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ....)

هو الحد ....

(أ) $ح_{٩}$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{٨}$ (د) $ح_{٧}$

⑥ المتتابعة الهندسية التزايدية التى حدها الثانى يساوى ٨ ومجموع حديها الأول والثالث يساوى ٢٠ هى ....

(أ) (٤ ، ٦ ، ١٤ ، ...) (ب) (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...)

(جـ) (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) (د) (١ ، ٤ ، ١٦ ، ...)

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع حدود المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....) إلى ما لانهاية يساوى .... بدءًا من الحد الأول.

(أ) ١٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٣٢ (د) ١٢٨

② |صفر + |١ + |٢ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

③ إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ٢٠$ فإن : $\underline{|ن - ٣}$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ١

④ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام {٥ ، ٤ ، ٧} هو ....

(أ) ٦ (ب) ٢٧ (جـ) ١٢ (د) ١

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{٥}$ = ...

(أ) ١ (ب) ١٥ (جـ) ٥ (د) ٦

⑥ إذا كان : $^{٧}ق_{س} = {}^{٥}ق_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٣

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦
فإن : د (٤) = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) −٤ (د) ٧

② إذا كانت د : د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ٣ س + ١ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١

③ إذا كانت : دَ (٢) = ٧ ، د (س) = $س^{٢}$ + م س + ٥ فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

④ إذا كانت د : د (س) = (س − ١) ($س^{٢}$ + س + ١) فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

⑤ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$ فإن : دَ (صفر) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٣ (د) −٢

⑥ إذا كانت د : د (س) = $(س - ٢)^{٢}$ فإن : دَ (٣) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ١٥ (د) ٥

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : ص = $ع^{٢}$ + ٣ ، ع = ٣ س − ٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٦

② معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٣ س + ١ عند النقطة (١ ، −١) هى ....

(أ) ص + س = صفر (ب) ص − س = صفر

(جـ) ٢ ص + س = صفر (د) ٢ س + ص = صفر

③ معدل تغير الدالة د : د (س) = ٨ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ٤

④ ∫ ٣ $س^٢$ ء س = ... + ث

(أ) ٣ $س^٣$ (ب) $س^٣$ (جـ) ٦ س (د) ٤ س

⑤ ∫ (س − ١) (س + ١) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{س^٣}{٣}$ − س (ب) $س^٣$ − س (جـ) $س^٢$ + ١ (د) $س^٢$

⑥ ∫ $\frac{٢ س^٢ + س}{س}$ ء س = ... + ث

(أ) س (ب) $س^٢$ − س (جـ) $س^٢$ (د) $س^٢$ + س

⑦ ∫ ٥ $(س − ١)^٤$ ء س = ... + ث

(أ) $س^٥$ − س (ب) $(س + ١)^٥$ (جـ) $س^٥$ + س (د) $(س − ١)^٥$

---

٥ $ح_ن$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢$ = ٦ ، $ح_٢$ − $ح_١$ = ٩

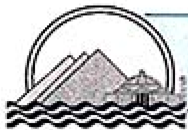
أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها.

---

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٤ س + ٣ عند النقطة (١ ، صفر)

٢ محافظة الجيزة

إدارة كرداسة
توجيه الرياضيات



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير = ٢٦ ، ومجموع حدودها = ٢٦٠ فإن عدد حدودها يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٢٢

② إذا كانت (٢٩ ، س ، .... ، ص ، ٦١) متتابعة حسابية

فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٩ (ب) ٦١ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

③ إذا كان : $\underline{|س} = ٧٢٠$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

④ عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى صف واحد = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

⑤ فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ....) رتبة الحد الذى قيمته ٣٠٧٢ هى ....

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

⑥ إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ٥٠٤٠$ فإن : ن= ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ن=١}^{١٠} (ن^{٢}) =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٢٢٠ (د) ٣٨٥

② إذا كان : $^{ن}ق_{٨} = {}^{ن}ق_{٧}$ فإن : ن= ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١٥ (د) ٥٦

③ قيمة المقدار (٤ + ٨ + ١٦ + ... + ٢٥٦) تساوى ....

(أ) ٥٠٨ (ب) ٦٥٦ (جـ) ٨٦٤ (د) ٣٤٤

④ إذا كان : $\underline{|س + ١} : \underline{|س} = ٧$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : ر ممكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

⑥ الوسط الهندسى الموجب للعددين ٤ ، ١٦ يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ١١ (جـ) ١٠ (د) ٨

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = (س^{٢} − ١) (٧ س^{٣} + ١) فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١٤ (ب) ١٦ (جـ) ٣٧ (د) ٤٤

(٢) التغير للدالة د : د (س) = ٦ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) صفر

(٣) إذا كانت : ص = $ع^{٣}$ ، ع = $س^{٢}$ + ٤ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ١٢٤ (ب) ١٣٠ (جـ) ١٥٠ (د) ١٥٤

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + س + ٤ عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

(٥) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٢ س + ٥}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٦) $\int$ ١٥ $(٣ س + ٧)^{٤}$ ءس = ... + ث

(أ) $(٣ س + ٧)^{٤}$ (ب) ١٥ $(٣ س + ٧)^{٤}$

(جـ) $(٣ س + ٧)^{٥}$ (د) ١٥ $(٣ س + ٧)^{٥}$

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المنحنى : ص = ك $س^{٢}$ + م يمس المستقيم : ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (–١ ، –٣) فإن : ك – م = ...

(أ) –١ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) –٥

(٢) معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س - ١}{س - ٢}$ عند س = ٣ هى ....

(أ) س – ص = ٦ (ب) س – ص = ٥

(جـ) س + ص = ٥ (د) س + ص = ٦

(٣) $\int$ (٦ $س^{٢}$ – ٢ س) ءس = ... + ث

(أ) ٣ $س^{٣}$ – ٢ $س^{٢}$ (ب) ٣ $س^{٣}$ – ٢

(جـ) ٢ $س^{٣}$ – $س^{٢}$ (د) $س^{٣}$ – $س^{٢}$

(٤) إذا كان : $(س + ص)^{٦}$ = ١٧ فإن : صَ = ...

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) –١٧ (د) ١٧

(٥) إذا كانت : ص = $(٣ س - ٥)^{٢}$ فإن : صَ = ... عند س = ٢

(أ) ١٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

⑥ $\frac{د}{د س}$ (حتا π) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) صفر

⑦ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د (س) = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ − ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ يساوى ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

---

٥ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة د : د (س) = س^{٣} − ١٢ س + ٥ وعندها المماس يوازى محور السينات.

---

٦ متتابعة هندسـية حدها الثانى = ٢٤٠ ، حدها الخامس = ٣٠ أوجد المتتابعة ومجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الأول.



٣ محافظة الإسكندرية

إدارة وسط
توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى المتتابعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ....) الحد الذى قيمته ١٠٠ هو ....

(أ) $ح_{٧}$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{١١}$ (د) $ح_{١٢}$

② إذا كانت : (٣ ، أ ، .... ، ٥ ، أ٥ ، ٤٥) متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ٤٠ (د) ٤٨

③ مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٣٤٣ (د) ٥١٢

④ الحد الرابع من المتتابعة ($ح_{ن}$) حيث $ح_{ن}$ = ٢ × ٣$^{ن+١}$ يساوى ....

(أ) ٣٢٤ (ب) ٤٨٦ (جـ) ١٦٢ (د) ٢٤٣

⑤ فى المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ....) رتبة الحد الذى قيمته −٣٨٤ هى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

⑥ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة حدها الأول ٤ وحدها الثالث ١ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ١٢

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\underline{|ن}$ = ١٢٠ فإن : $^{ن}ل_{٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ١٥

② إذا كان : $^{١٠}ل_{ر}$ = ٧٢٠ فإن : $^{٤}ق_{ر+١}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٦

③ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

④ إذا كان : $^{ن}ق_{٢}$ = ١٢٠ فإن : $^{ن}ق_{ن-٩}$ = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٦٠ (جـ) ١٠ (د) ٣٠

⑤ إذا كان : $^{٢١}ق_{ر}$ = $^{٢١}ق_{ر+١}$ فإن : ر = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ٢١ (د) ١٢

⑥ إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ٣٣٦ ، $^{ن}ق_{ر}$ = ٥٦ فإن : $\underline{|ر}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٨

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦
فإن : د (٤) = ...

(أ) –٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

② معدل تغير الدالة د : د (س) = ٣ $س^{٢}$ + ٥ عند س = ١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٥

③ ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ – ٣ عند النقطة (٢ ، ٥) يساوى ....

(أ) ٧٥ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٧٢

④ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢}{٤} س^{-٨}\right)$ = ...

(أ) –٦ $س^{-٩}$ (ب) –٦ $س^{-٧}$ (جـ) ٦ $س^{٧}$ (د) –٦ $س^{٩}$

⑤ $\frac{ء}{ءس}\left((س + ١)(س + ٣)\right)$ = ...

(أ) $س^{٢}$ + ٤ (ب) ٢ س + ٤ (جـ) ٢ س + ٣ (د) صفر

⑥ إذا كانت : د $(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٢

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س}{\sqrt{س}}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ (ب) $٢\sqrt{س}$ (جـ) ٢ س (د) $\frac{١}{٢}$ س

② إذا كانت : ص = $ع^٥$ ، ع = $س^٢ + ١$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١

تساوى ....

(أ) ١٦٠ (ب) ١١٢ (جـ) ٨٤ (د) ٦٤

③ قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د : د $(س) = \frac{١}{٦} س^٢$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\sqrt{٣}$ يساوى ....

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °٤٥ (د) °٩٠

④ إذا كانت : د $(س) = (أ س + ٢)^٢$ ، وكانت : دَ (١) = ٦ فإن : أ = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ١ أ، −٣ (د) ١ أ، ٣

⑤ $\int س^٢ ءس$ = ... + ث

(أ) ٢ س (ب) $س^٣$ (جـ) $\frac{١}{٣} س^٣$ (د) $٣ س^٣$

⑥ $\int س (س + ٣) ءس$ = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣} (س + ٣)^٢$ (ب) $\frac{١}{٣} س^٣ + \frac{٣}{٢} س^٢$

(جـ) $س^٢ + ٣ س$ (د) $س^٢ + ٢ س$

⑦ $\int (٨ - ٣ س)^٤ ءس$ = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٥} (٨ - ٣ س)^٥$ (ب) $\frac{١}{٥} (٨ - ٣ س)^٥$

(جـ) $\frac{-١}{٥} (٨ - ٣ س)^٥$ (د) $\frac{-١}{١٥} (٨ - ٣ س)^٥$

٥ أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثانى يساوى ١٠ وحدها الثالث يساوى ٢٠

٦ أوجد معادلة العمودى على منحنى الدالة د $(س) = ٣ س^٢ + ١$ عند النقطة (١ ، ٤)



إدارة القناطر الخيرية
توجيه الرياضيات

٤ محافظة القليوبية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد العام للمتتابعة (٢ ، ٨ ، ١٨ ، ٣٢ ، ....) هو $ح_{ن}$ = ...

(أ) $ن^{٢}$ (ب) ١ + ن (جـ) $٢ ن^{٢}$ (د) ٢ + ٤ ن

② $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ ر - ١)$ = ...

(أ) ٣٥ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٢ (د) ٤٠

③ فى المتتابعة الهندسية (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ....) ، $ح_{∞}$ ابتداء من الحد الأول = ...

(أ) ٦٩ (ب) ٤٨ (جـ) ٩٦ (د) ٢٤

④ إذا كانت (٢ ، س ، ص ، ع ، هـ ، ١٧ ، ....) متتابعة حسابية
فإن : ص = ...

(أ) ٨ (ب) ١١ (جـ) ١٣ (د) ١٤

⑤ فى المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) الحد الذى قيمته ٧٦٨ هو ....

(أ) $ح_{٨}$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{٩}$ (د) $ح_{١١}$

⑥ مجموع المتتابعة الحسابية (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، .... ، ٧٠) يساوى ....

(أ) ٩٠٠ (ب) ٨٨٨ (جـ) ٧٧٧ (د) ٨٤٧

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{س}ل_{٢} = ٤٢$ فإن : $\underline{|س - ٥}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٦

② $^{٦}ل_{٢} + ^{٦}ق_{٢}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

③ $^{١٢}ل_{ر} ÷ ^{١١}ل_{ر-١}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

④ مطعم يقدم ثلاثة أنواع من اللحوم ونوعين من النشويات وثلاثة أنواع من السلطات فإن عدد الطرق التى يمكن لشخص اختيار وجبة تحتوى مكون واحد من كل نوع يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ١٢

⑤ إذا كان : $ق_ن^{٧} = ق_ن^{٣}$ فإن : $\lfloor ١٠ - ن$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

⑥ أمام شخص ٤ وسائل مواصلات للذهاب من القناطر إلى القاهرة (سيارة – قطار – دراجة – باخرة نيلية) فإن عدد طرق الذهاب والعودة مستخدمًا وسيلة مختلفة أثناء العودة يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٢٠ (د) ١٢

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان التغير فى الدالة د يساوى ٢,٨ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن متوسط التغير فى الدالة د يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ١,٤ (جـ) ٤,٨ (د) ٢,٨

② إذا كانت : د (س) = ٢ $س^٢$ – ٥ س فإن قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

③ إذا كانت : ص = $ع^٢$ ، ع = ٣ $س^٢$ – ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) –٢٤ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) –١٢

④ إذا كانت : د (س) = ١٦ $\sqrt{١١ - س}$ فإن : دَ (–٥) = ...

(أ) ٢ (ب) –٤ (جـ) ٤ (د) –٢

⑤ $\int$ (٦ $س^٢$ + ٥) ءس = ... + ث

(أ) ٦ س + ٥ (ب) ٦ س (جـ) ٤ $س^٣$ + س (د) ٢ $س^٣$ + ٥ س

⑥ $\int$ ٧٠ (٥ س – ٣$)^٦$ ءس = ... + ث

(أ) ٣٥ (٥ س – ٣$)^٦$ (ب) ٧٠ (٥ س – ٣$)^٥$

(جـ) ٢ (٥ س – ٣$)^٧$ (د) ١٠ (٥ س – ٣$)^٥$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = ٤ س^{٢} فإن : د (١) − دَ (١) = ...

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) −٨

② إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) = س^{٤} + ك س + ١ يساوى ٧

عند س = ١ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

③ إذا كانت : ص = (س^{٢} + ١) (٣ − س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = صفر

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ١٠ (د) ٨

④ إذا كان : ∫ (٤ س + ١) ءس = م س^{٢} + ك س + ث

فإن : م − ك = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١

⑤ إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ١}{٢ س + ١}$ فإن : دَ (صفر) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) ١

⑥ إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ك فإن معدل التغير فى الدالة عند س = ٢

(حيث ك ثابت) يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ٤

⑦ ∫ $\frac{٤ س^{٢} - ١}{٢ س - ١}$ ءس = ... + ث

(أ) س^{٢} − ١ (ب) س^{٢} + ١ (جـ) س^{٢} + س (د) ٢ س + ١

---

٥ إذا كانت د (س) = س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ٦ س + ١ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة د والتى عندها المماس يوازى محور السينات.

---

٦ إذا كانت : ٤ ، س ، ص فى تتابع حسابى وكانت : ٢ ، س + ٣ ، ٥ ص فى تتابع هندسى فأوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الأول س وأساسها ص



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ وكانت د (٢) = ٦
فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

② إذا كان : $^{١٢}ق_{ر} : ^{١٢}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (ر + ١) =$ ....

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٤٠

④ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = $س^٢ - ١$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى ....°

(أ) ٤٥ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٨٠

⑤ عدد حدود المتتابعة الهندسية (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، .... ، $\frac{١}{٩}$) يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٨

⑥ إذا كان : $^{ن-١}ل_{٣} = ١٢٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ٩

② $\frac{ء}{ءس} \left(\frac{\pi}{٤}\right) =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) صفر (د) −١

③ مجموع المتسلسلة الحسابية : ٣٣ + ٣٧ + ٤١ + ... + ٨٩ هو ....

(أ) ٨٩٥ (ب) ٩٠٠ (جـ) ٩١٠ (د) ٩١٥

④ $\int (٤س^٣ - ٧) ءس =$ .... + ث

(أ) $٤س^٤$ (ب) $س^٤ - ٧س$ (جـ) $س^٣ - ٧س$ (د) $١٢س^٢$

⑤ عدد الحدود اللازم أخذه من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ٣٨١ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٩

⑥ المماس لمنحنى الدالة ص = $س^٢$ + ٤ س يوازى محور السينات عند س = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) −٤ (د) ٢

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط تغير الدالة د (س) = $س^٢$ − ٣ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ يساوى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٦ (جـ) ١٦ (د) ٨

② قيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٢١ ، ١٨ ، ١٥ ، ....) هى ....

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٤

③ إذا كان : |ن + ٢ = ٧٢٠ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٥

④ إذا كانت : دَ (٤) = صفر ، د (س) = $س^٢$ + ك س فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) −٨ (جـ) ٨ (د) ٤

⑤ عدد طرق اختيار لجنة من ٣ أشخاص من بين ١٠ أشخاص هو .... طريقة.

(أ) ١٢٠ (ب) ٧٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

⑥ ∫ ٥ ء س = ... + ث

(أ) ٢ س (ب) ١٠ س (جـ) ٥ س (د) $س^٥$

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، .... ، ٧٧) هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ٢٦

② إذا كانت : د (س) = $\frac{٣}{س + ١}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٢}$

③ إذا كانت : ص = $ع^٣$ ، ع = $س^٢$ − ٣ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) −١٢ (د) ٤٠

④ معادلة المماس لمنحنى الدالة د (س) = $س^2$ − ١ عند النقطة (١ ، ٠) الواقعة عليه هى ....

(أ) ص = ٢ س　　(ب) ص − ٢ س = ٥

(جـ) س + ص = ٠　　(د) ٢ س − ص = ٢

⑤ $\int$ (٢ س + ٧)^5 ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{2}$ (٢ س + ٧)^6　　(ب) $\frac{1}{10}$ (٢ س + ٧)^6

(جـ) $\frac{1}{12}$ (٢ س + ٧)^6　　(د) $\frac{1}{6}$ (٢ س + ٧)^6

⑥ إذا كان : $^{ن}ل_{٢}$ = ٥٦　فإن : ن = ...

(أ) ١٠　(ب) ٥　(جـ) ٦　(د) ٨

⑦ إذا كانت : ص = ٣ $س^2$ − ٢ س − ٥　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ٨　(ب) ٤　(جـ) صفر　(د) ٦

---

٥ إذا كانت : ص = ($س^2$ + ٣) ($س^3$ + ٥) **فأوجد :** $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = −١

---

٦ متتابعة هندسية غير منتهية وكل حدودها موجبة فيها : $ح_2$ = ٨ ، $ح_5$ = ١ أوجد المتتابعة ، $ح_\infty$



٦ محافظة المنوفية

إدارة بركة السبع
توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=1}^{8}$ (٣ ر + ٢) = ...

(أ) ١١٢　(ب) ١٢٤　(جـ) ٢٤٨　(د) ٢٩٧

② أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ....) هو ....

(أ) $ح_{١٠}$　(ب) $ح_{١٢}$　(جـ) $ح_{١٦}$　(د) $ح_{١٧}$

③ عددان وسطهما الحسابى ١٧ ، ووسطهما الهندسى ٨ فإن الفرق بين العددين يساوى ....

(أ) ٣٠　(ب) ٢٠　(جـ) ٩　(د) ٦

④ مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ٥ وأساسها ٣ يكون ....

(أ) ٦٠　(ب) ٢٤٢　(جـ) ٣١٥　(د) ٦٠٥

⑤ رتبة الحد الذى قيمته ٥١٢ فى المتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ....)
هى ....

(أ) ١٤ (ب) ١٣ (جـ) ١٢ (د) ٩

⑥ مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية $(ح_ن) = ٥ (٦)^{٢-ن}$
يساوى ....

(أ) ٩٦ (ب) ٥٤ (جـ) ٤٨ (د) ٣٦

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}
هو ....

(أ) ٧٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

② إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ١٢٠$ فإن : $\underline{|ن - ٢} =$ ....

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٦ (د) ٢٤

③ إذا كان : $^{ن}ق_{١٤} = {}^{ن}ق_{١٠}$ فإن : $^{٢٤}ق_{ن} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٤٩

④ إذا كان : $^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ق_{٢} = ٢١$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

⑤ إذا كان : $٥ \underline{|ن} = \underline{|٥}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑥ إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٨٤$ فإن : $^{ن}ق_{٣} =$ ....

(أ) ٣٥ (ب) ٥٦ (جـ) ٨٤ (د) ١٢٠

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $د(س) = س^{٢} + ك س + ٢$ وكانت : $دَ(٢) = ٩$
فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

② ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = \sqrt{٢س}$ عند النقطة (٢ ، ٢) يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

③ إذا كانت : ص = (س + ٥) (س^{٢} − ٥ س + ٢٥) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ س − ٥ (ب) ٢ س^{٢} − ٥ س

(جـ) ٣ س^{٢} − ٢٥ س (د) ٣ س^{٢}

④ ∫ (٣ س + ١)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٨}$ (٣ س + ١)^{٦} (ب) $\frac{١}{٢}$ (٣ س + ١)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{٣}$ (٣ س + ١)^{٦} (د) $\frac{١}{٦}$ (٣ س + ١)^{٦}

⑤ ∫ (٩ س^{٢} + ٤ س) ءس = ... + ث

(أ) ٣ س^{٣} + ٤ س^{٢} (ب) ٩ س^{٣} + ٤ س^{٢}

(جـ) ٩ س + ٤ (د) ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢}

⑥ ∫ $\frac{٦ س^{٣} + س}{س}$ ءس = ... + ث

(أ) ٣ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (ب) ٢ س^{٣} + س

(جـ) س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (د) ٣ س^{٢} + س

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط تغير الدالة د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ....

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

② معدل تغير الدالة د (س) = س^{٢} − ٤ عند س = −٢ يساوى ....

(أ) −٥ (ب) −٤ (جـ) ٣ (د) ١٢

③ إذا كانت : ص = (٤ س^{٢} − ٦ س + ١)^{٥} فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٤٩

④ المماس لمنحنى الدالة : ص = س^{٣} − ٢٧ س + ٥ يوازى محور السينات عند س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٤ (د) ± ٥

⑤ إذا كانت : ص = $\frac{٣ س + ١}{س + ١}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

⑥ $\int$ (س − ٣) (س + ٣) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{1}{3}$ س^3 − ٩ س　　(ب) $\frac{1}{3}$ س^3 + ٩ س

(جـ) $\frac{1}{3}$ س^3 − ٩　　(د) $\frac{1}{3}$ س^3

⑦ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = س^2 − ١

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عندما س = $\frac{1}{2}$ يساوى ....

(أ) ٣٠°　　(ب) ٤٥°　　(جـ) ٦٠°　　(د) ١٣٥°

---

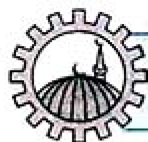
٥ متتابعة حسابية حدها الأول = ١٠ ، ومجموع ١٠ حدود الأولى منها = ٢٣٥ أوجد المتتابعة.

---

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = ٣ س^2 + ٥ س + ١ عند النقطة (٠ ، ١)

٧ محافظة الغربية

إدارة غرب المحلة الكبرى
توجيه الرياضيات



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ٠| + ١| + ٢| + ٣| = ...

(أ) ٦　　(ب) ٨　　(جـ) ٩　　(د) ١٠

② إذا كانت د (س) = ٣ س − ٢ فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٣　　(ب) هـ　　(جـ) ٣ هـ　　(د) ٦ هـ

③ إذا كانت : ص = س^2 ، س = ع^3 − ١　فإن : $\frac{ءص}{ءع}$ = ... عندما ع = −١

(أ) ١٢　　(ب) −١٢　　(جـ) ٦　　(د) −٦

④ عدد حدود المتتابعة (٢ ، ٨ ، ١٤ ، .... ، ٦٨) يساوى .... حدًا.

(أ) ٦　　(ب) ٨　　(جـ) ١٢　　(د) ١٦

⑤ المماس للمنحنى : ص = س^2 − ٨ س + ٢ يوازى محور السينات

عند س = ...

(أ) −٨　　(ب) صفر　　(جـ) ٢　　(د) ٤

⑥ إذا كان : ن ل° = ٦٠　فإن : ن = ...

(أ) ٥　　(ب) ٤　　(جـ) ٣　　(د) ٢

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ ر + ١) = ...

(أ) ٢٣ (ب) ٢٧ (جـ) ٣٤ (د) ٤٣

② عدد طرق ترتيب ٥ مقاعد متمايزة فى صف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

③ $\int$ ٦ $س^٢$ ءس = ... + ث

(أ) ٣ $س^٢$ (ب) ٦ س (جـ) ٣ $س^٣$ (د) ٢ $س^٣$

④ إذا كانت : دَ (٢) = ٥ ، د (س) = $س^٢$ + م س + ٥ فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٠

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ٤٢ ، $\underline{|ن - ر}$ = ١٢٠ فإن : $^{ن}ق_{ر+٢}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٤٢

⑥ متوسط تغير الدالة د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، .... ، ١٢٨) هى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٩٥

② إذا كان التغير فى د يساوى ١٤ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ فإن متوسط التغير فى د = ...

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٣,٥ (د) –٧

③ إذا كانت : د (س) = (س – ١) (س + ٣) فإن : دَ (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (جـ) ٢ س – ٣ (د) ٢ س + ٢

④ إذا كانت معادلة العمودى على المنحنى د (س) عند النقطة (٢ ، –١) هى س – ٢ ص = ٤ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ١ (د) –١

⑤ الوسط الهندسى للأعداد : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢٥ يساوى ....

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٨

⑥ إذا كان : $ج_{٩} = ج_{١١}$ فإن : $ج_{١٨}$ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٣٨ (جـ) ١٩٠ (د) ٣٨٠

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\overline{|٣ن - ٧} = ١٢٠$ فإن : $ج_{ن-١}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

② فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ....) رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ هى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

③ معدل تغير الدالة د (س) = $س^{٢}$ + ٥ س − ٢ عند س = −١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

④ إذا كان : $\int$ أ $س^{٣}$ ءس = ٢ $س^{٤}$ + ث فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑤ إذا كانت : ص = $(س + ك)^{٢}$ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عند س = صفر فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) −٢ (د) ٤

⑥ متتابعة هندسية فيها $ح_{٢}$ = ٢٤٠ ، $ح_{٥}$ = ٣٠ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوى ....

(أ) ٣٦٠ (ب) ٤٨٠ (جـ) ٩٦٠ (د) ١٩٢٠

⑦ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٦ سم يساوى ....

(أ) ١٠٩ (ب) ٩١ (جـ) ٢١٦ (د) ١٢٥

---

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها : $ح_{٧}$ = ١٨ ، $ح_{١٠}$ = ٣٤

---

٦ أوجد المشتقة الأولى للدالة : ص = $\frac{٢س + ٥}{١ - ٤س}$ ثم أوجد قيمتها عندما س = صفر

٨ محافظة الدقهلية

إدارة المنزلة
توجيه الرياضيات



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=١}^{١٠} ر^{٢}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٢٢٠ (د) ٣٨٥

② رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ....) هى ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

③ فى أى متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد ....

(أ) الخامس (ب) الرابع (جـ) العاشر (د) السادس

④ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢ = ...

(أ) ٦٦٤ (ب) ٦٧٠ (جـ) ٦٦٠ (د) ٦٧٢

⑤ إذا كانت : $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية حيث $ح_{ن} = ٧ \times (٣)^{ن-١}$ فإن الوسط الهندسى بين $ح_{٣}$ ، $ح_{٧}$ هو ....

(أ) ± ٥٧٠ (ب) ± ٥٦٧ (جـ) ± ٥٤٠ (د) ± ٥٦٠

⑥ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣ \frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٩

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٦

② إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

③ $^{٩}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{١} + {}^{٣}ل_{٣}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٩٦ (د) ١٨٩

④ إذا كان : $١٠ \times \underline{|٢ن - ٢} = ٢٤٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

⑤ إذا كان : $^{٦}ق_{س} = {}^{٤}ق_{س}$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑥ إذا كان $^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٣ : ١$ فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معدل التغير للدالة د : د (س) = $س^{٤}$ عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٣٢٤

② إذا كانت د (س) = $أ^{٢}$ حيث أ ثابت فإن : دَ (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ أ (جـ) ٢ (د) $أ^{٢}$

③ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

④ إذا كان : $\frac{ء}{ء س}\left[(أ س)^{٢}\right]$ = ٢٤ عند س = ١ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

⑤ إذا كانت : ص = $\frac{س^{٢} + ٦}{س^{٢} + ٥}$ فإن : صَ عندما س = ١ تساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

⑥ إذا كانت : ص = $ع^{٥}$ ، ع = $س^{٢}$ − ١ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عند س = ٢

(أ) ٣٢ (ب) ١٦٢٠ (جـ) ١٢٦٠ (د) ٩٦

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ $س^{٢}$ + ٢ س − ١ عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٨ (د) ١٤

② $\int (٢ س + ١)^{٥}$ ء س = ... + ث

(أ) $(٢ س + ١)^{٦}$ (ب) $\frac{١}{١٢}(٢ س + ١)^{٦}$

(جـ) $\frac{١}{٦}(٢ س + ١)^{٦}$ (د) $\frac{١}{٢}(٢ س + ١)^{٦}$

③ $\int س(س + ٢)\,ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١}{٢}(س + ٢)^٢$ (ب) $س^٣ + ٢س$ (ج) $س^٢ + ٢س$ (د) $\frac{١}{٣}س^٣ + س^٢$

④ $\int (س + ٢)(س - ٢)\,ءس = ... + ث$

(أ) $س + ٤$ (ب) $\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س$

(ج) $س^٣ - ٤س$ (د) $(س^٢ - ٤)^٢$

⑤ $\int \frac{س^٢ - ١}{س - ١}\,ءس = ... + ث$

(أ) $س + ١$ (ب) $\frac{١}{٢}س^٢ + س$ (ج) $س^٢ + س$ (د) $س^٢ + ٢س$

⑥ إذا كانت : $د(س) = (س^٢ - ٢)^٥$ فإن : $دَ(١) = ...$

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) −٥ (د) −١٠

⑦ إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٣}$ فإن : $دَ(١) = ...$

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) $\frac{١}{٢}$

٥ أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعدد حدودها ٢٠

٦ إذا كانت : $ص = أس^٢ + ٥$ وكان : $\frac{ءص}{ءس} = ٨$ عندما $س = ٢$ فأوجد قيمة : أ

٩ محافظة الإسماعيلية

إدارة القصاصين
توجيه الرياضيات



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ....) يكون مجموع الخمسة حدود الأولى هو ....

(أ) ٤٤٢ (ب) ٤٢٤ (ج) ٢٤٢ (د) ٢٤٣

② إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س^٣ - ٤}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ...$ عند $س = ٢$

(أ) −٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) ٣ (د) $\frac{١}{٢}$

③ إذا كان : $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٦}$ فإن : $ر = ...$

(أ) ٦ فقط. (ب) ٩ فقط. (ج) ٨ فقط. (د) ٦ أ، ٩

④ إذا كانت : د (س) = ٣ س − ٢ فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٣ (ب) هـ (جـ) ٣ هـ (د) ٦ هـ

⑤ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ٣ ر = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٤٠ (د) ٣٠

⑥ النقطة الواقعة على منحنى الدالة د (س) = $(س - ٣)^{٢}$ − ١ والتى عندها المماس لمنحنى الدالة يكون موازيًا للمستقيم ٢ س + ص − ١ = ٠ هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٣ ، −١) (د) (١ ، ٣)

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أول حد سالب فى المتتابعة (٦٢ ، ٥٧ ، ٥٢ ، ....) هو ....

(أ) $ح_{١١}$ (ب) $ح_{١٢}$ (جـ) $ح_{١٣}$ (د) $ح_{١٤}$

② معدل تغير د (س) = $س^{٢}$ + ٥ س − ٢ عند (س = −١) يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

③ إذا كان : $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ فإن : ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٣

④ ميل المماس لمنحنى الدالة : ص = ٢ س − $س^{٣}$ عند س = صفر هو ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٦

⑤ $\int$ (٣ $س^{٢}$ − ١) ء س = ...

(أ) ٤ $س^{٣}$ + س + ث (ب) $س^{٣}$ − س

(جـ) $س^{٣}$ − س + ث (د) ٢ $س^{٢}$ − س + ث

⑥ إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢}$ = ٣٦ فإن : ن = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ١٢

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : ص = ٥ $س^{٢}$ − ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ١

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ٩

② الحد العاشر فى المتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) هو ....

(أ) ١٩ (ب) ١١ (جـ) ٢١ (د) ١٥

③ إذا كانت : ص = (ع + ١)^{٢} ، ع = س^{٥} − ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س^{١٥} (ب) س^{٨} (جـ) ١٥ س^{١٤} (د) ٨ س^{٧}

④ الأعداد الطبيعية المحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ والتى تقبل القسمة على ٣ يكون مجموعها ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٣٤٣ (د) ٥١٢

⑤ $^{٦}ق_{١}$ + $^{٦}ق_{٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

⑥ مجموع المتتابعة اللا نهائية (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ....) يساوى ....

(أ) ٧٢ (ب) ٦٤ (جـ) ٤٨ (د) ٢٤

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معادلة المماس لمنحنى الدالة د (س) = س^{٢} + ٣ عند النقطة (١ ، ٤) هى ....

(أ) ص = ٢ س (ب) ص − ٢ س + ٥ = ٠

(جـ) س + ص = ٢ (د) ص − ٢ س = ٢

② عدد طرق جلوس ٤ طلاب على ٤ مقاعد فى صف واحد يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٤ (د) $\underline{|٤}$

③ ن $\underline{|ن}$ + $\underline{|ن}$ = $\underline{|.......}$

(أ) ن (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن − ١

④ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} − ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

⑤ إذا كانت : ص = س^{٤} + ٢ فإن : $(صَ)_{س = ١}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

⑥ $\int$ −٢ ع ءع = ...

(أ) ع + ث (ب) ث − ع^{٢} (جـ) ع^{٢} − ث (د) ع^{٢} + ث

⑦ $\frac{ء}{ءس}$ (س − ١) (س + ٣) = ...

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (جـ) ٢ س − ٣ (د) ٢ س + ٢

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس ٢١ ، حدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثانى.

---

٦ إذا كانت : $ص = \frac{٥}{٢س + ٣}$ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ١

١٠ محافظة بورسعيد

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة هو ....

(أ) ٢ ن (ب) ٢ ن − ١ (جـ) ٢ ن + ١ (د) ٤ ن − ٢

(٢) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢ (د) ٥

(٣) عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٤ وجبات و ٦ مشروبات هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٤) عدد الطرق الممكنة لاختيار ٥ طلاب من بين ١٣ طالبًا يساوى ....

(أ) ٦٥ (ب) ١٢٩٧ (جـ) ١٢٨٧ (د) ١٥٤٤٤٠

(٥) إذا كان : $\underline{|٣س - ٧}$ = ١٢٠ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٦) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢}$ = ٣٦ فإن : ن= ....

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى أى متتابعة حسابية يكون الوسط التاسع هو الحد .... فى المتتابعة.

(أ) العاشر (ب) الثامن (جـ) التاسع (د) الحادى عشر

(٢) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ....) رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ تساوى ....

(أ) ٩٢ (ب) ٥١ (جـ) ٤٦ (د) ٤٥

③ إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} = {^{ن}ق_{١٤}}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٥ (د) ٥

④ إذا كانت : ص = $ع^٢$ + ٢ ، ع = ٢ س + ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...
عندما س = صفر

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ إذا كان : $^{٥}ل_{ر+١}$ = ٦٠ فإن : ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑥ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها الخامس يساوى ٤٨ فإن مجموع العشرة حدود الأولى منها يساوى ....

(أ) ١٠٢٣ (ب) ٢٠٤٦ (جـ) ٣٠٦٩ (د) ٤١٢٩

② متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير يساوى ٤٦ ومجموع جميع حدودها ٣٤٥ فإن عدد حدودها يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٣٥

③ إذا كانت : د (س) = (٣ $س^٢$ − ١) (٢ $س^٣$ + ١) فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٨ (جـ) ٣٠ (د) ١

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س^٢ + ٩}$ فإن : دَ (−٤) = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

⑤ $\int$ ٣ (س + ٣) (س − ٣) ء س = ... + ث

(أ) ٣ $س^٣$ − ٢٧ س (ب) $س^٣$ + ٢٧ س

(جـ) ٣ $س^٣$ + ٢٧ س (د) $س^٣$ − ٢٧ س

⑥ ميل المماس للمنحنى : د (س) = ٣ $س^٣$ عندما س = ١ هو ....

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٣٦ (د) ٣

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المماس للمنحنى : ص = $س^٢$ − ٨ س + ٢ يوازى محور السينات عندما س = ...

(أ) −٨ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) صفر

② $\int (٢ س + ٣)^٥ \, ء س$ = ... + ث

(أ) $(٣ س + ٢)^٦$ (ب) $\frac{١}{١٢}(٢ س + ٣)^٦$

(جـ) ١٠ $(٢ س + ٣)^٤$ (د) ٦ $(٢ س + ٣)^٦$

③ إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ ، د (٣) = ٨ فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٧

④ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ص = $س^٢$ − ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ هو ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ١٨٠°

⑤ إذا كانت : ص = $(٣)^٧$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٧ × $٣^٦$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{٣^٨}{٨}$

⑥ إذا كانت : د (س) = $\frac{س − ٢}{س + ٢}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) $\frac{−١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

⑦ $\int \frac{س^٢ + ٣ س}{س} \, ء س$ = ... + ث

(أ) س + ٣ (ب) $\frac{١}{٢}س^٢$ + ٣ س

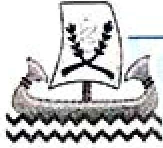
(جـ) ٢ س + ٣ (د) $\frac{١}{٢}س^٣$ + $\frac{١}{٢}س^٢$

---

٥ متتابعة حسابية فيها $ح_٧$ = ٥١ ، $ح_{١٦}$ = ١٠٥ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها.

---

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = ٢ $س^٣$ − ٤ $س^٢$ + ٣ عند النقطة (٢ ، ٣)



١١ محافظة كفر الشيخ

إدارة سيدى سالم
توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد النونى للمتتابعة (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...) هو ....

(أ) ن + ١ (ب) ٢ ن − ١ (جـ) ٢ ن + ١ (د) ٢ ن + ٣

② الحد الخامس عشر فى المتتابعة الحسابية (٩٩ ، ٩٠ ، ٨١ ، ...) هو ....

(أ) −٢٧ (ب) ٢٧ (جـ) −١٨ (د) ١٨

③ الحد الثامن فى المتتابعة الهندسية (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ...) يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

④ مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١ ، ٧ ، ١٣ ، ... ، ٦٧) يساوى ....

(أ) ٤٢٠ (ب) ٤١٤ (جـ) ٤٠٨ (د) ٤٠٢

⑤ إذا كانت : س ، ص ، ع ثلاثة أعداد حقيقية موجبة تكون متتابعة هندسية فإن : ....

(أ) $ص^٢ = س ع$ (ب) $ص^٢ = س + ع$

(جـ) $٢ ص = \sqrt{س ع}$ (د) $س + ع = ٢ ص$

⑥ مجموع حدود عدد لا نهائى من المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ....) ابتداءً من الحد الأول يساوى ....

(أ) ٣٢ (ب) ٦٤ (جـ) ١٢٨ (د) ١٤٤

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٥} يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٢٧

② عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى صف واحد يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ١٢٠ (جـ) ٧٢٠ (د) ٥٠٤٠

③ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

④ مجموعة حل المعادلة : $\underline{|ن - ٨} = ١$ هى ....

(أ) $\{٨\}$ (ب) $\{٩\}$ (جـ) $\{٨ ، ٩\}$ (د) $\{صفر\}$

⑤ إذا كان : ${}^{ن}ق_{١} = {}^{ن}ق_{٢}$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

⑥ إذا كان لدينا ١٥ طالبًا و١٠ طالبات فإن عدد الطرق التى يمكن بها اختيار مجموعة مكونة من ٤ طلاب وطالبتين هو .... طريقة.

(أ) ${}^{١٥}ق_{٤} \times {}^{١٠}ق_{٢}$ (ب) ${}^{١٥}ل_{٤} \times {}^{١٠}ل_{٢}$

(جـ) ${}^{١٥}ق_{٤} + {}^{١٠}ق_{٢}$ (د) ${}^{١٥}ل_{٤} + {}^{١٠}ل_{٢}$

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط التغير فى حجم مكعب بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٠٩ (ب) ١٢٥ (جـ) ٢١٨ (د) ٣٤٣

② ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ١ عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

③ $\frac{ء}{ء س}$ (٧ π) = ...

(أ) ٧ (ب) –٧ (جـ) صفر (د) π

④ معادلة المماس للمنحنى : ص = $(س - ١)^{٢}$ عند النقطة (٢ ، ١) هى ....

(أ) ص = ٢ س – ٣ (ب) ص = س – ١

(جـ) ص = ٢ س (د) س = ٢ ص – ٣

⑤ إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ + أ س + ٤ ، دَ (١) = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) –٣ (د) ٧

⑥ إذا كانت : د (س) = $(٢ س + ١)^{٥}$ فإن : دَ (٠) = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\int$ ٥ س^{٢} ءس = ... + ث

(أ) ٥ س^{٢} (ب) $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} (جـ) $\frac{٣}{٥}$ س^{٣} (د) ١٠ س

② $\int$ (٥ س − ١)^{٣} ءس = ... + ث

(أ) (٥ س − ١)^{٤} (ب) ٤ (٥ س − ١)^{٣}

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (٥ س − ١)^{٤} (د) $\frac{١}{٢٠}$ (٥ س − ١)^{٤}

③ $\int$ (س + ٢) (س − ٢) ءس = ... + ث

(أ) س^{٢} − ٤ س (ب) س + ٤

(جـ) (س^{٢} − ٤)^{٢} (د) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤ س

④ إذا كانت : ص = (ع + ١)^{٤} ، ع = س^{٢} − ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س^{٧} (ب) س^{٨} (جـ) ٤ س^{٣} (د) ٨ س^{٧}

⑤ معدل تغير الدالة د حيث د (س) = ٢ س^{٣} − ١٥ عندما س = ١ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) −٩ (د) −١٣

⑥ $\int$ $\frac{س^{٢} + ٥ س}{س}$ ءس = ... + ث

(أ) س + ٥ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٥ س

(جـ) س + $\frac{٥}{س}$ (د) س^{٢} + ٥ س

⑦ إذا كانت : د (س) = ٥ س − ٢ فإن دالة التغير فى د عندما س = ٢ تساوى ....

(أ) ٢ هـ (ب) ٣ هـ (جـ) ٥ هـ (د) ٦ هـ

---

٥ كم حدًا يلزم أخذها من المتتابعة (−١٦ ، −١٤ ، −١٢ ، ....) ابتداء من الحد الأول لكى يكون مجموعها صفرًا ؟

---

٦ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س − ١}$



إدارة بندر دمنهور
توجيه الرياضيات

١٢ محافظة البحيرة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة $(ح_{ن}) = (٤)^{٣ - ن}$ ابتداء من حدها الأول يساوى ....

(أ) ٢٧ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٦٤}{٣}$ (د) $\frac{٢٧}{٢}$

② إذا كان : $^{١٢}ق_{ر} = {}^{١٢}ق_{٢ر + ٣}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ‎-٣ (جـ) ± ٣ (د) ٦

③ مشتقة الدالة د (س) = ٤ س^{٢} – ٥ س تساوى ....

(أ) ٨ س (ب) ٨ س – ٥ (جـ) ٦ س^{٢} (د) ٣ – ٢ س

④ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٢} – ٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

⑤ إذا كان : $\underline{|ن} = أ$ فإن : $\underline{|ن - ١} =$ ....

(أ) أ – ١ (ب) أ + ن (جـ) ن أ (د) $\frac{أ}{ن}$

⑥ إذا كان : $^{٦}ل_{ر} = ٣٦٠$ فإن : $\underline{|ر} =$ ....

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦ (د) ٢٤

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مشتقة الدالة ص = $\frac{٢ س + ٥}{١ - ٤ س}$ عند س = ٠ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢٢

② إذا كانت : ص = (ع – ٢)^{٣} ، ع = س^{٥} + ٣ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ٢٢٥ (ب) ‎-٢٢٥ (جـ) ٦٠ (د) ‎-٦٠

③ $\int$ ١٢ س^{٢} ءس = ... + ث

(أ) ٤ س^{٣} (ب) ٨ س^{٢} (جـ) ٣ س^{٢} (د) ٢ س^{٣}

④ الوسط الهندسى الموجب للعددين ٢٥ ، ٣٦ هو ....

(أ) ١٠٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٢ (د) ٣٠

⑤ مجموع حدود المتتابعة (١ ، ٤ ، ٧ ، .... ، ٣٤) هو ....

(أ) ١٢٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٧٦ (د) ٢١٠

⑥ عدد حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ومجموع حدودها = ٣٦٤ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أول حد سالب فى المتتابعة (٩٩ ، ٩٦ ، ٩٣ ، ٩٠ ، ....) هو ....

(أ) $ح_{٣٣}$ (ب) $ح_{٣٤}$ (جـ) $ح_{٣٥}$ (د) $ح_{٣٦}$

② ميل المماس للمنحنى : ص = $\frac{-٣}{س}$ عندما س = $\sqrt{٣}$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) صفر (د) غير معرف

③ إذا كان : $^{٦}ق_{ر}$ = ٢٠ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ١

④ $\int$ (٢ س – ٣) ء س = ... + ث

(أ) $س^٢$ – ٣ س (ب) ٣ $س^٢$ – ٣ (جـ) ٢ $س^٢$ + ٣ س (د) $س^٢$ – ٣

⑤ معدل تغير الدالة د (س) = ٢ $س^٣$ – ١ عند س = –٥ يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ١٤٩ (جـ) –٧٥ (د) ١٥٠

⑥ $^{٥}ل_{٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٦٠ (د) ١٥

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) يساوى ....

(أ) ٤٠٥٠ (ب) ١٨٩ (جـ) ٧٦٥ (د) ٣٦٥٠

② إذا كانت : د (س) = $(٢ س – ٣)^٥$ فإن مجموعة الحل للمعادلة : دَ (س) = ١٠ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {٢ ، ١} (د) {٢ ، ٣}

③ إذا كان : ${}^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ ، ${}^{٤}ق_{ر} = ٤$ فإن : ${}^{٢ر}ق_{ر}$ يمكن أن يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٦

④ إذا كانت : ص = ٢ س − ٥ هو مماس للمنحنى : ص = أ $س^{٢}$ − ب س + ١

عند النقطة (١ ، −٣) فإن : أ + ب = ...

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٦ (د) −١١٦

⑤ $\int$ (٤ $س^{٣}$ + ٤ س + ٧) ء س = ... + ث

(أ) $س^{٤}$ + ٢ $س^{٢}$ + ٧ س (ب) $س^{٤}$ + ٢ س + ٧

(جـ) $س^{٣}$ + ٢ $س^{٢}$ + ٧ س (د) $س^{٣}$ + ٤ $س^{٢}$

⑥ متوسط التغير فى الدالة د (س) = $س^{٢}$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١

يساوى ....

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٦١ (جـ) ٦,١ (د) ٩

⑦ $\int$ (س − ٣) ($س^{٢}$ + ٣ س + ٩) ء س = ... + ث

(أ) $س^{٤}$ − ٩ س (ب) $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٢٧ س

(جـ) $س^{٥}$ − ٢٧ س (د) ٤ $س^{٣}$ − ١

---

٥ أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه لمنحنى الدالة : ص = $س^{٢}$ + ٢ س

عند النقطة (−١ ، −١) الواقعة على المنحنى.

---

٦ فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ....)

أوجد : (أ) حدها العاشر. (ب) مجموع العشرين حدًا الأولى منها.



١٣ محافظة بنى سويف

إدارة ناصر
توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متتابعة مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : $جـ_{ن} = ن^{٢} − ٢ ن$ فإن حدها

الخامس هو ....

(أ) ٣٥ (ب) {١٥} (جـ) ١٠ (د) ٧

② مجموعة حل المعادلة : $|س| = ١$ فى ح هى ....

(أ) {١}　(ب) {صفر}　(جـ) {٠ ، ١}　(د) {١ ، -١}

③ $\sum_{ر=٢}^{٨} (٢ر + ٣) =$ ....

(أ) ٩٩　(ب) ٩٦　(جـ) ٩٣　(د) ٩١

④ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥　(ب) ٣٤٣　(جـ) ٢١٨　(د) ١٠٩

⑤ $^{١٠}ق_{٨} \div {}^{١٠}ق_{٢} =$ ....

(أ) ٤　(ب) ١٦　(جـ) ١　(د) ١٠

⑥ الحد العام للمتتابعة (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ....) هو $ح_{ن} =$ ....

(أ) ٧ن - ٦　(ب) $ن^{٢}$　(جـ) $ن^{٣}$　(د) ٣ن

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ١١ ، ١٥ ، .... ، ٢٧١) هو ....

(أ) ٣٤　(ب) ٦٧　(جـ) ١٦٩　(د) ٩٣١٣

② عددان موجبان وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٤ فإن الفرق بين العددين = ...

(أ) ١　(ب) ٦　(جـ) ٩　(د) ٢٠

③ عدد طرق اختيار ثلاثة طلاب من بين مجموعة بها ستة طلاب هو ....

(أ) ٦　(ب) ١٢　(جـ) ١٨　(د) ٢٠

④ مجموع المتتابعة الهندسية (٩ ، ٣ ، ١ ، ....) إلى ما لا نهاية يساوى ....

(أ) ١٨　(ب) $\frac{٢٧}{٢}$　(جـ) $\frac{١}{٩}$　(د) ٢٧

⑤ إذا كان : $^{٥}ق_{ر} = {}^{٥}ل_{ر}$ فإن : ر يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) صفر　(د) ١٠

⑥ عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من مجموعة الأرقام {٣ ، ٤ ، ٠ ، ٧} يساوى ....

(أ) ٦　(ب) ٨　(جـ) ٩　(د) ١٢

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{10}ق_{٨} + {}^{10}ق_{٧} = {}^{11}ق_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٠

② ميل العمودى على المنحنى د : د (س) = $\frac{١}{س}$ عندما س = ٢ يساوى ....

(أ) −٤ (ب) $\frac{-١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

③ إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ وكانت : د (٢) = ٦ فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

④ $\int$ ءس = ...

(أ) س (ب) $\frac{١}{٢}$ س^٢ (جـ) س + ث (د) $\frac{١}{٢}$ س^٢ + ث

⑤ معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = ٣ س^٢ − ٨ عند النقطة (٢ ، ٤) هى ....

(أ) ص = ١٢ س (ب) ص = ٤ س − ٢٠

(جـ) ١٢ س + ص = ٢٠ (د) ١٢ س − ص = ٢٠

⑥ إذا كانت : د (س) = (س^٢ + ٥) (س + ٣) فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٤ (جـ) ١٠ (د) ١

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\int$ (٣ − س)^٥ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ (٣ − س)^٥ (ب) $\frac{١}{٦}$ (٣ − س)^٦

(جـ) $\frac{-١}{٦}$ (٣ − س)^٦ (د) $\frac{-١}{٥}$ (٣ − س)^٦

② إذا كانت : د (س) = ٥ س + ١ فإن التغير فى الدالة د عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٥ (جـ) ٥,١ (د) ٥

③ $\frac{ء}{ءس}$ (٥ π) = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٢}$ $\pi^٢$ (جـ) صفر (د) ٥ π س

④ $\int$ س (س + ٢) ءس = $\frac{١}{٣}$ س^٣ + ... + ث

(أ) س^٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ س^٣ (د) $\frac{١}{٢}$ س

⑤ معدل تغير الدالة د : د (س) = $س^{١٥}$ عندما س = ١ هو ....

(أ) ١ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) صفر

⑥ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ فإن : دَ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{س + ٥}}$ (ب) $\frac{١}{٢\sqrt{س + ٥}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{س + ٥}}$ (د) ١

⑦ $\int (٢س - ١)^{٧}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٨}(٢س - ١)^{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}(٢س - ١)^{٨}$

(جـ) $\frac{١}{١٦}(٢س - ١)^{٨}$ (د) $\frac{١}{٨}(٢س - ١)^{٧}$

---

٥ متتابعة هندسية حدها الأول ٢٤٣ وحدها الأخير ١ ومجموع حدودها ٣٦٤ أوجد المتتابعة.

---

٦ إذا كانت : ص = $ع^{٥}$ + ٣ ، ع = س + ١ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٢



١٤ محافظة المنيا

إدارة دير مواس
توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى المتتابعة الحسابية إذا كان : $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = ٣ فإن أساس المتتابعة يساوى ....

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ١ (د) −١

② أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ....) هو ....

(أ) $ح_{١٨}$ (ب) $ح_{١٩}$ (جـ) $ح_{٢٦}$ (د) $ح_{٢٤}$

③ الحد التالى فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، ....) هو ....

(أ) $\frac{١٣}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

④ $\sum_{ر=١}^{٢} (٣ر)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٨

⑤ الحد العاشر فى المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ....) قيمته تساوى ....

(أ) −١٥٣٦ (ب) ١٥٣٦ (جـ) ١٥٠٠ (د) −١٥٠٠

(٦) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى ٥ وأساسها يساوى $\frac{1}{2}$ فإن : $ح_{\infty}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) −١٠ (د) −٥

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\underline{|ن}$ = ٢٤ فإن : ن = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

(٢) عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و ٤ مشروبات يساوى ....

(أ) ٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ١

(٣) إذا كان : $^{ن}ل_{٢}$ = ٣٠ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ٤٩

(٤) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢}$ = ٣٦ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) عدد الطرق التى يمكن بها اختيار ٧ طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة يساوى ....

(أ) ٧٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٤٤

(٦) إذا كان : $^{١٢}ق_{ر} = {}^{١٢}ق_{٢ر+٣}$ فإن : ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ وكانت : د (٣) = ٨ فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٥

(٢) معدل تغير الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ عند س = ١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س + ١}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) ١ (د) −١

④ إذا كانت : ص = $\sqrt{٢ - س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٢ ص}$ (ب) −١ (جـ) −٢ ص − ١ (د) −٢ ص

⑤ إذا كانت : ص = $(ع + ١)^{٣}$ ، ع = $س^{٦}$ − ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $س^{١٨}$ (ب) $س^{٨}$ (جـ) ١٨ $س^{١٧}$ (د) ٨ $س^{٧}$

⑥ ميل المماس للمنحنى : ص = ٣ $س^{٢}$ + ٢ س − ١ عندما س = ٢

يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٨ (د) ١٤

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\int$ (س + ٢) ءس = ... + ث

(أ) ٢ $س^{٢}$ + ٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ + ٢ س

(جـ) $(س + ٢)^{٢}$ (د) $س^{٢}$

② $\int$ ٥ ءس = ... + ث

(أ) ٥ س (ب) س (جـ) ٥ (د) ٥ $س^{٢}$

③ إذا كانت : ص = (س + ٢) (س − ١) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (جـ) س (د) س + ١

④ إذا كانت : ص = $س^{-٢}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) −٣ $س^{-٣}$ (ب) −٢ $س^{-٣}$ (جـ) − $س^{-٣}$ (د) $\frac{-١}{س}$

⑤ إذا كانت : د (س) = ٢ $س^{٢}$ + أ س وكانت : دَ (٥) = ١٥ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٥ (د) −٥

⑥ ميل العمودى على منحنى الدالة : د (س) = $س^{٢}$ − ٨ س عندما س = −١

يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) −١٠ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

⑦ $\int$ $(٢ س - ٣)^{١٠}$ ءس = ... + ث

(أ) ١٠ $(٢ س - ٣)^{٩}$ (ب) $\frac{١}{١١}$ $(٢ س - ٣)^{١١}$

(جـ) $\frac{١}{٢٢}$ $(٢ س - ٣)^{١١}$ (د) $\frac{١}{٢٢}$ $(٢ س - ٣)^{٢٢}$

٥ متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها الثامن يساوى ٣٨٤ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها.

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = $س^2$ + ٢ س + ٧ عند النقطة (٠ ، ٧)



١٥ محافظة سوهاج

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) متتابعة حسابية (٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ....) فإن أول حد سالب هو ....

(أ) $ح_٩$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{١١}$ (د) $ح_{١٢}$

(٢) عدد حدود المتتابعة الهندسية (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، .... ، ٣) هو ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣) عددان موجبان وسطهما الحسابى ١٢,٥ ووسطهما الهندسى ١٢ فإن الفرق بين العددين يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤) إذا كان : $\lfloor ٢ن - ٥ = ١٢٠$ فإن : $^{ن+١}ق_ن$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٥) متتابعة حسابية حدها الثالث = ١٢ وحدها السابع = ٢٤ فإن حدها التاسع يساوى ....

(أ) ٣٦ (ب) ٣٩ (جـ) ٣٠ (د) ٣٣

(٦) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٨ ح_٥$ ، $ح_٢ + ح_٤ = ٤٠$ فإن مجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوى ....

(أ) ٤٩ (ب) ١٢٦ (جـ) ٢١٦ (د) ١٢٤

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٦ رجال و ٤ سيدات ؟

(أ) ١٩ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٦ (د) ٦٠

(٢) إذا كان : $^{ن}ل_ر = ٦٠$ ، $^{ن}ق_ر = ١٠$ فإن : ن − ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٣

③ (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....) متتابعة هندسية فإن مجموع حدودها إلى ما لا نهاية يساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٥٦ (د) ١٢٨

④ إذا كان : $\underline{|ن}$ = ١ فإن : ن = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) صفر ، ١

⑤ إذا كان : $^{٢٧}ق_{ر + ١٤} = {}^{٢٧}ق_{٢ر + ٧}$ فإن : ر يمكن أن تكون ....

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

⑥ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من مجموعة الأرقام {٤ ، ٦ ، ٧} يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٤ (د) ٢٧

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\int س^٢ \left(٤ س - \frac{١}{س^٢}\right) ءس$ = ... + ث

(أ) $٤ س^٣ - ١$ (ب) $س^٤ - س$ (جـ) $٢ س^٢ - \frac{١}{س^٢}$ (د) $س^٤ - \frac{١}{س^٢}$

② متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٤ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٩٣ (ب) ٩٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

③ معدل تغير $س^٢ - ٤$ بالنسبة إلى س عندما س = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ١٢

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٢ س + ٣}$ فإن : دَ (٠) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) $\sqrt{٣}$

⑤ إذا كانت : ص = $س^٢$ ، س = $ع^٢ - ١$ فإن : $\frac{ءص}{ءع}$ = ... عند ع = ١

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) صفر

⑥ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = $س^٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤}\right)$ يساوى ....

(أ) $٤٥°$ (ب) $٦٣° \ ٢٦'$ (جـ) $١٣٥°$ (د) $٢٦° \ ٣٤'$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان المماس للمنحنى : د (س) = أ س^{٢} − ٨ س + ١ عند النقطة (١ ، −٣)
يوازى محور السينات فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨

② ميل المماس للمنحنى : ص = (٣ س − ٥)^{١٠} عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{١٢}$ (جـ) ٣٠ (د) ١٠

③ معادلة المماس للمنحنى : ص = $\frac{١ - ٢ س}{س - ٢}$ عند النقطة (١ ، ١) هى ....

(أ) ص = ٣ س − ٢ (ب) ص = ٢ س − ٣
(جـ) ص = −٣ س + ٤ (د) ص = ٢ س + ٣

④ $\int \frac{ء}{ء س}$ (س^{٤} + ٧) ء س = ... + ث

(أ) س^{٥} + ٧ س (ب) س^{٤}
(جـ) $\frac{١}{٥}$ س^{٥} + ٧ س (د) س^{٤} + ٧ س

⑤ $\int$ (٣ س + ١)^{٧} ء س = ... + ث

(أ) (٣ س + ١)^{٨} (ب) $\frac{١}{٣}$ (٣ س + ١)^{٨}
(جـ) $\frac{١}{٨}$ (٣ س + ١)^{٨} (د) $\frac{١}{٢٤}$ (٣ س + ١)^{٨}

⑥ المشتقة الأولى للدالة : ص = (س^{٢} + ٣) (س^{٢} + ٢) عند س = ١
تساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

⑦ $\int \frac{٤ س^{٢} - ٩}{٢ س - ٣}$ ء س = ... + ث

(أ) ٢ س + ٣ (ب) ٢ س^{٢} + ٣ س
(جـ) س^{٢} + ٣ س (د) ٢ س^{٢} + ٣ س

---

٥ متتابعة حسابية حدها الثالث = ٨٢ ، حدها السادس = ٥٥ أوجد المتتابعة وكذلك مجموع العشرة حدود الأولى منها.

---

٦ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٢ س^{٢} − ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس للمنحنى يوازى محور السينات.

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

١ ① (أ) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

٢ ① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

٣ ① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (ب)

٤ ① (د) ② (أ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (د)

٥

أ ر = ٦ (١)

أ ر^{٢} − أ = ٩

أ (ر^{٢} − ١) = ٩ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{أ(ر^{٢} - ١)}{أ ر} = \frac{٩}{٦}$ ∴ $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$

∴ ٢ ر^{٢} − ٣ ر − ٢ = ٠

∴ (٢ ر + ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = ٢ أ، ر = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

، حـ$_{١٢}$ = $\frac{٣ (٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١}$ = ١٢٢٨٥

٦

دَ(س) = ٢ س − ٤

عند النقطة (١ ، صفر)

∴ ميل المماس = ٢ × ١ − ٤ = −٢

معادلة المماس هى $\frac{ص - ٠}{س - ١}$ = −٢

∴ ٢ س + ص − ٢ = ٠

٢ محافظة الجيزة

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (د)

٢ ① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (د)

٣ ① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

٤ ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (د) ⑦ (ب)

٥

∵ د(س) = س^{٣} − ١٢ س + ٥

∴ دَ(س) = ٣ س^{٢} − ١٢

∴ المماس يوازى محور السينات.

∴ ٣ س^{٢} − ١٢ = ٠

٣ س^{٢} = ١٢ س^{٢} = ٤ س = ± ٢

عند س = ٢ : ص = (٢)^{٣} − ١٢ (٢) + ٥ = −١١

عند س = −٢ : ص = (−٢)^{٣} − ١٢ (−٢) + ٥ = ٢١

∴ النقط هى (٢ ، −١١) ، (−٢ ، ٢١)

٦

أ ر = ٢٤٠ ، أ ر^{٤} = ٣٠

∴ $\frac{أ ر^{٤}}{أ ر} = \frac{٣٠}{٢٤٠}$ ∴ ر^{٣} = $\frac{١}{٨}$

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ، أ = $\frac{٢٤٠}{\frac{١}{٢}}$ = ٤٨٠

∴ المتتابعة هى (٤٨٠ ، ٢٤٠ ، ١٢٠ ، ...)

، حـ$_{\infty}$ = $\frac{٤٨٠}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ٩٦٠

٣ محافظة الإسكندرية

١ ① (ب) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (أ)

٢ ① (ب) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (أ)

٣ ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٤ ① (أ) ② (أ) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (د)

٥

أ ر = ١٠ ، أ ر^{٢} = ٢٠

$\frac{أ ر^{٢}}{أ ر} = \frac{٢٠}{١٠}$ ∴ ر = ٢

، ٢ أ = ١٠ ∴ أ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ....)

٦

∵ د(س) = ٣ س^{٢} + ١ ∴ دَ(س) = ٦ س

عند النقطة (١ ، ٤)

∴ ميل المماس = ٦ × ١ = ٦

∴ ميل العمودى = $\frac{-١}{٦}$

معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٤}{س - ١} = \frac{-١}{٦}$

∴ ٦ ص − ٢٤ = − س + ١

∴ س + ٦ ص − ٢٥ = ٠

٤ محافظة القليوبية

١ ① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (د)

٢ ① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (د)

٣ ① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

٤ ① (أ) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (جـ)

٥

دَ(س) = ٣ س^{٢} + ٣ س − ٦

∵ المماس يوازى محور السينات.

∴ الميل = صفر

∴ ٣ س^{٢} + ٣ س − ٦ = ٠

∴ س = ١ أو س = −٢

عند س = ١ : ص = (١)^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ (١)^{٢} − ٦ (١) + ١

∴ ص = $\frac{-٥}{٢}$

عند س = −٢ : ص = (−٢)^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ (−٢)^{٢} − ٦ (−٢) + ١

∴ ص = ١١

∴ النقط هى : (١ ، $\frac{-٥}{٢}$) ، (−٢ ، ١١)

٦

∵ ٤ ، س ، ص فى تتابع حسابى.

∴ ٢ س = ٤ + ص ومنها ص = ٢ س − ٤

∵ ٢ ، س + ٣ ، ٥ ص فى تتابع هندسى.

∴ (س + ٣)^{٢} = ١٠ ص

∴ (س + ٣)^{٢} = ١٠ (٢ س − ٤)

∴ س^{٢} − ١٤ س + ٤٩ = ٠

∴ س = ٧

، ص = ٢ (٧) − ٤ = ١٠

∴ المتتابعة هى : (٧ ، ١٧ ، ٢٧ ، ٣٧ ، ....)

٥ محافظة الشرقية

1 ① (د) ② (جـ) ③ (ب)
④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (ب)

2 ① (جـ) ② (جـ) ③ (د)
④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (أ)

3 ① (د) ② (جـ) ③ (جـ)
④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

4 ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (د)
⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (ب)

5

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ س (س^٣ + ٥) + ٣ س^٢ (س^٢ + ٣)

عند س = -١

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = -٢ (٤) + ٣ (٤) = ٤

6

أ ر = ٨ ، أ ر^٤ = ١

$\frac{أ ر^٤}{أ ر} = \frac{١}{٨}$ ∴ ر^٣ = $\frac{١}{٨}$

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ أ = ٨ ∴ أ = ١٦

∴ جـ∞ = $\frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ٣٢

٦ محافظة المنوفية

1 ① (ب) ② (أ) ③ (أ)
④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (د)

2 ① (جـ) ② (جـ) ③ (أ)
④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ)

3 ① (جـ) ② (د) ③ (د)
④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (د)

4 ① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (ب)

5

أ = ١٠

جـ١٠ = ٢٣٥

٥ [٢ × ١٠ + ٩ × ء] = ٢٣٥

٢٠ + ٩ ء = ٤٧

٩ ء = ٢٧

∴ ء = ٣

∴ المتتابعة هي : (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ....)

6

ص = ٣ س^٢ + ٥ س + ١

ص' = ٦ س + ٥ عند النقطة (٠ ، ١)

∴ ميل المماس = ٦ (٠) + ٥ = ٥

∴ معادلة المماس هي : $\frac{ص - ١}{س - ٠}$ = ٥

ص - ١ = ٥ س

∴ ٥ س - ص + ١ = ٠

٧ محافظة الغربية

1 ① (د) ② (جـ) ③ (ب)
④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

2 ① (جـ) ② (د) ③ (د)
④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

3 ① (جـ) ② (ب) ③ (د)
④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ)

4 ① (ب) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ)
⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (ب)

5

∵ ع٧ = ١٨ ∴ أ + ٦ ء = ١٨ (١)

∵ ع١٥ = ٣٤

∴ أ + ١٤ ء = ٣٤ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن :

أ = ٦ ، ء = ٢

∴ المتتابعة الحسابية هي : (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ....)

6

ص = $\frac{٢ س + ٥}{١ - ٤ س}$

ص' = $\frac{٢ (١ - ٤ س) - (-٤) (٢ س + ٥)}{(١ - ٤ س)^٢}$

= $\frac{٢ - ٨ س + ٨ س + ٢٠}{(١ - ٤ س)^٢}$

= $\frac{٢٢}{(١ - ٤ س)^٢}$

، عند س = ٠ :

∴ ص' = $\frac{٢٢}{(١ - ٤ (٠))^٢} = \frac{٢٢}{١}$ = ٢٢

٨ محافظة الدقهلية

1 ① (د) ② (جـ) ③ (د)
④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (د)

2 ① (ب) ② (ب) ③ (أ)
④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (د)

3 ① (جـ) ② (أ) ③ (د)
④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (ب)

4 ① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (ب)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (د)

5

∵ أ = ٣ ، ل = ٢١ ، ن = ٢٠

∴ جـ٢٠ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٣ + ٢١] = ٢٤٠

6

∵ ص = أ س^٢ + ٥ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ أ س

، عندما س = ٢

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٨

∴ ٤ أ = ٨ ∴ أ = ٢

٩ محافظة الإسماعيلية

1 ① (جـ) ② (جـ) ③ (د)
④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (ب)

2 ① (د) ② (أ) ③ (د)
④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

3 ① (أ) ② (جـ) ③ (جـ)
④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (ب)

4 ① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)
⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (د)

5

∵ ع٥ = ٢١ أ + ٤ ء = ٢١ (١)

، ع١٠ = ٣ ع٢

(أ + ٩ ء) = ٣ (أ + ء)

أ + ٩ ء = ٣ أ + ٣ ء

∴ -٢ أ + ٦ ء = ٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن :

أ = ٩ ، ء = ٣

∴ المتتابعة الحسابية هي : (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ....)

٦

$د(س) = \frac{٥}{٢س + ٣}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٢(٥)}{(٢س + ٣)^٢}$

، عندما س = ١

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-١٠}{(٢(١) + ٣)^٢} = \frac{-١٠}{٢٥} = \frac{-٢}{٥}$

١٠ محافظة بورسعيد

١ ①(ب) ②(ب) ③(أ) ④(جـ) ⑤(أ) ⑥(ب)

٢ ①(أ) ②(جـ) ③(جـ) ④(أ) ⑤(ب) ⑥(د)

٣ ①(جـ) ②(أ) ③(جـ) ④(ب) ⑤(د) ⑥(أ)

٤ ①(جـ) ②(ب) ③(أ) ④(أ) ⑤(جـ) ⑥(د) ⑦(ب)

٥

$\because ح_٧ = ٥١ \quad \therefore أ + ٦ء = ٥١$ (١)

$، ح_{١٦} = ١٠٥ \quad أ + ١٥ء = ١٠٥$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن :

أ = ١٥ ، ء = ٦

∴ المتتابعة الحسابية هي (١٥ ، ٢١ ، ٢٧ ، ...)

$\therefore جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢(١٥) + ٩(٦)] = ٤٢٠$

٦

$د(س) = ٢س^٣ - ٤س^٢ + ٣$

$د'(س) = ٦س^٢ - ٨س$

، عند النقطة (٢ ، ٣)

$\therefore$ ميل المماس $= ٦(٢)^٢ - ٨(٢) = ٨$

∴ معادلة المماس هي : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{٨}{١}$

ص − ٣ = ٨س − ١٦

∴ ٨س − ص = ١٣

١١ محافظة كفر الشيخ

١ ①(أ) ②(أ) ③(أ) ④(جـ) ⑤(أ) ⑥(جـ)

٢ ①(د) ②(د) ③(ب) ④(جـ) ⑤(د) ⑥(أ)

٣ ①(أ) ②(ب) ③(جـ) ④(أ) ⑤(ب) ⑥(جـ)

٤ ①(ب) ②(د) ③(د) ④(د) ⑤(ب) ⑥(ب) ⑦(جـ)

٥

∵ أ = −١٦ ، ء = ٢

، ∵ جـن = صفر

$\therefore \frac{ن}{٢}[٢(-١٦) + (ن - ١)(٢)] =$ صفر

$\frac{ن}{٢}(-٣٢ + ٢ن - ٢) = ٠$

$\frac{ن}{٢}(٢ن - ٣٤) = ٠$

$ن^٢ - ١٧ن = ٠$

∴ ن = صفر (مرفوض) أ، ن = ١٧

∴ عدد الحدود التي يلزم أخذها هو ١٧ حدًا.

٦

$د(س) = \sqrt{س - ١}$

$ت(هـ) = د(س + هـ) - د(س)$

$= \sqrt{س + هـ - ١} - \sqrt{س - ١}$

$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{\sqrt{س + هـ - ١} - \sqrt{س - ١}}{هـ}$

معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س + هـ - ١} - \sqrt{س - ١}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س + هـ - ١} + \sqrt{س - ١}}{\sqrt{س + هـ - ١} + \sqrt{س - ١}}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س + هـ - ١ - س + ١}{هـ(\sqrt{س + هـ - ١} + \sqrt{س - ١})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س + هـ - ١} + \sqrt{س - ١}} = \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$

∴ مشتقة الدالة $= \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$

١٢ محافظة البحيرة

١ ①(جـ) ②(أ) ③(ب) ④(أ) ⑤(د) ⑥(د)

٢ ①(د) ②(جـ) ③(أ) ④(د) ⑤(د) ⑥(أ)

٣ ①(جـ) ②(ب) ③(جـ) ④(أ) ⑤(د) ⑥(جـ)

٤ ①(ب) ②(جـ) ③(جـ) ④(جـ) ⑤(أ) ⑥(جـ) ⑦(ب)

٥

$\because ص = س^٢ + ٢س$

$\therefore ص' = ٢س + ٢$

، عند النقطة (−١ ، −١)

∴ ميل المماس = صفر

∴ معادلة المماس هي : $\frac{ص + ١}{س + ١} =$ صفر

∴ ص = −١

، معادلة العمودي هي : $\frac{ص + ١}{س + ١} = \frac{١}{صفر}$

∴ س = −١

٦

∵ أ = ٥ ، ء = ٣

$(أ)\ ح_{١٠} = أ + ٩ء = ٥ + ٩(٣) = ٣٢$

$(ب)\ جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[٢(٥) + ١٩(٣)]$

$\therefore جـ_{٢٠} = ٦٧٠$

١٣ محافظة بني سويف

١ ①(د) ②(جـ) ③(د) ④(د) ⑤(جـ) ⑥(ب)

٢ ①(ب) ②(ب) ③(د) ④(ب) ⑤(د) ⑥(جـ)

٣ ①(جـ) ②(د) ③(د) ④(جـ) ⑤(د) ⑥(ب)

٤ ①(جـ) ②(ب) ③(جـ) ④(أ) ⑤(ب) ⑥(ب) ⑦(جـ)

٥

∵ أ = ٢٤٣ ، ل = ١

جـن = ٣٦٤

$\therefore \frac{٢٤٣ - ر}{١ - ر} = ٣٦٤$

٢٤٣ − ر = ٣٦٤ − ٣٦٤ر

∴ ٣٦٣ر = ١٢١ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

∴ المتتابعة الهندسية هي : (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، .... ، ١)

٦

$\frac{دص}{دع} = ٥ع^٤ \quad ، \quad \frac{دع}{دس} = ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٥ع^٤ \times ١ = ٥ع^٤ = ٥(س + ١)^٤$

، عندما س = ٢

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٥(٢ + ١)^٤ = ٤٠٥$

١٤ محافظة المنيا

١
① (أ) ② (ب) ③ (د)
④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (ب)

٢
① (جـ) ② (ب) ③ (ب)
④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ)

٣
① (أ) ② (ب) ③ (ب)
④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (د)

٤
① (ب) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب)
⑤ (د) ⑥ (جـ) ⑦ (جـ)

٥

∵ $ح_{٣} = ١٢$ $\quad$ $أ ر^{٢} = ١٢$ (١)

، $ح_{٨} = ٣٨٤$ $\quad$ $أ ر^{٧} = ٣٨٤$ (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) ينتج أن :

$ر^{٥} = ٣٢$ $\quad$ ∴ $ر = ٢$

، $أ = \frac{١٢}{٤}$ $\quad$ ∴ $أ = ٣$

∴ المتتابعة الهندسية هى : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

، $جـ_{١٠} = \frac{٣(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٣٠٦٩$

٦

∵ $ص = س^{٢} + ٢ س + ٧$

∴ $صَ = ٢ س + ٢$

، عند النقطة (٠ ، ٧)

∴ ميل المماس = ٢ (٠) + ٢ = ٢

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٧}{س} = ٢$

$ص - ٧ = ٢ س$

∴ $٢ س - ص = -٧$

١٥ محافظة سوهاج

١
① (د) ② (أ) ③ (جـ)
④ (د) ⑤ (جـ) ⑥ (د)

٢
① (د) ② (أ) ③ (جـ)
④ (د) ⑤ (جـ) ⑥ (د)

٣
① (ب) ② (ب) ③ (د)
④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (أ)

٤
① (ب) ② (جـ) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (جـ)

٥

∵ $ح_{٣} = ٨٢$ $\quad$ $أ + ٢ ء = ٨٢$ (١)

، $ح_{٦} = ٥٥$ $\quad$ $أ + ٥ ء = ٥٥$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن :

$أ = ١٠٠$ ، $ء = -٩$

∴ المتتابعة هى : (١٠٠ ، ٩١ ، ٨٢ ، ٧٣ ، ....)

، $جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢} [٢ (١٠٠) + ٩ (-٩)] = ٥٩٥$

٦

$ص = ٢ س^{٢} - ٤ س + ٣$

$صَ = ٤ س - ٤$

∴ المماس يوازى محور السينات.

∴ $٤ س - ٤ = ٠$ $\quad$ ∴ $س = ١$

، $ص = ٢ (١)^{٢} - ٤ (١) + ٣ = ١$

∴ النقطة هى (١ ، ١)

امتحانات رقم (2)

الترم الثانى





مديرية التربية والتعليم بدمياط — نموذج اختبار استرشادي الفصل الدراسي الثاني — المادة : الرياضيات العامة

توجيه الرياضيات — للعام الدراسي ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦ م — الصف : الثاني الثانوي (أدبي)



السؤال الأول :

(٦ درجات لكل فقرة درجة واحدة)

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) **المتسلسلة** ١ + ٤ + ٩ + ١٦ **تكتب باستخدام رمز التجميع** ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{١٦} ر^{٢}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢}$ (ج) $\sum_{ر=١}^{٤} ر$ (ء) $\sum_{ر=١}^{١٦} ر$

(٢) **اذا اكان** : ${}^{ن}ق_{١٢} = {}^{ن}ق_{١١}$ **فان** : ${}^{٢٤}ق_{ن} =$ ....

(أ) ٢٤ (ب) ٢٧٦ (ج) ٤٧ (ء) ٢٣

(٣) **متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طوله من ٥ سم الى ٧ سم يساوي** .... **سم**^{٣}

(أ) ١٢٥ (ب) ٢٠١٨ (ج) ١٠٩ (ء) ٣٤٣

(٤) $\int \frac{٢س^{٢} + ٣س}{س} \cdot ءس =$ .... + **ث** **حيث** $س \neq ٠$

(أ) $س^{٢} + ٣س$ (ب) $٢س + ٣$ (ج) $٢س^{٢} + ٣$ (ء) $٢س^{٢} + ٣س$

(٥) **متتابعة هندسية فيها** : $ح_{٤} = ٤٠$ ، $ح_{٧} = ٣٢٠$ **فان : حدها الأول** = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (ء) ٥

(٦) **اذا كان** : ${}^{٥}ل_{ر-١} = ٦٠$ **فإن** $\lfloor ٤-ر$ = ...

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) ٣ (ء) ٤

تابع بقية الأسئلة في الصفحة التالية

السؤال الثاني :

(٦ درجات لكل فقرة درجة واحدة)

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) **المماس لمنحنى الدالة : $ص = \sqrt{٢س + ٣}$ عند النقطة (−١ ، ١) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها** ....

(أ) $٤٥°$ (ب) $٦٠°$ (جـ) $١٣٥°$ (ء) $٩٠°$

(٢) $\int (٢س - ٥)^{٦} \cdot ءس =$ .... + ث

(أ) $(٢س - ٥)^{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}(٢س - ٥)^{٧}$ (جـ) $\frac{١}{١٤}(٢س - ٥)^{٧}$ (ء) $\frac{١}{١٢}(٢س - ٥)^{٦}$

(٣) **اذا كان :** $\underline{|٣ن - ٢} = ٢٤$ **فإن** ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (ء) ٤

(٤) **في المتتابعة الحسابية : (٥ ، ٨ ، ١١ ، ....) مجموع ١٠ حدود منها ابتداء من حدها السابع يساوي** ....

(أ) ٢٦٥ (ب) ٣٦٥ (جـ) ٤٦٥ (ء) ١٦٥

(٥) **عدد طرق ترتيب حروف كلمة (دمياط) تساوي** ....

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (ء) ٧٢٠

(٦) $\int (س + ٢)(س - ٢) \cdot ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢}$ (ب) $س^{٣} - ٤س$ (جـ) $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٤س$ (ء) $س^{٢} - ٤$



تابع بقية الأسئلة في الصفحة التالية

السؤال الثالث :

(٦ درجات لكل فقرة درجة واحدة)

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) النقطة الواقعة على منحنى الدالة : $ص = س^{٢} - ٤س$ والتي يكون المماس عندها موازيا محور السينات هي ....

(أ) (−٤ ، ٢)   (ب) (٢ ، ٤)   (جـ) (٤ ، ٢)   (ى) (٢ ، −٤)

(٢) اذا كان : $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٣٦$ فان : ن = ...

(أ) ٣   (ب) ٤   (جـ) ٥   (ى) ٦

(٣) اذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فان أساسها يساوي ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (ى) $\frac{٧}{٨}$

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة : $ص = (٣س - ٢)^{٦}$ عند $س = ١$ يساوي ....

(أ) ٣   (ب) ٦   (جـ) ١٨   (ى) −١٨

(٥) اذا كان : $\int س^{ك} \cdot ءس = \frac{١}{٤}س^{٤} + ث$ فان : ك = ...

(أ) ٢   (ب) ٣   (جـ) ٤   (ى) ٥

(٦) اذا كان : $د(س) = \frac{١}{س}$ فان : $د^{/}(١) =$ ....

(أ) ١   (ب) −١   (جـ) ٠   (ى) ٢

السؤال الرابع :

(٧ درجات لكل فقرة درجة واحدة)

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) **معادلة المماس لمنحنى الدالة :** ص = (س − ٢) ($س^{٣}$ − ٤) **عند النقطة (٢ ، ٠)**

(أ) ٤ س + ص + ٨ = ٠ (ب) ٤ س − ص − ٨ = ٠ (جـ) س + ٤ ص + ٨ = ٠ (ء) س − ٤ ص − ٨ = ٠

---

(٢) **عدد الاعداد المكونة من اربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ } بحيث يكون رقم الآحاد ٦ هو ....**

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (ء) ١٠٨

---

(٣) **اذا كان الوسط الحسابي بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابي بين ٤أ ، ٢ب هو ٢٠ فان :** ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (ء) ١٢

---

(٤) ∫ ٧ ءس = ...

(أ) ٧ (ب) ٧س + ث (جـ) ٧ + ث (ء) ٧ س

---

(٥) **اذا كان :** ص = $ع^{٥}$ ، ع = $س^{٢}$ + ١ **فان :** $\frac{ءص}{ءس}$ = ... **عند** س = ١

(أ) ٨٠ (ب) ١٦٠ (جـ) ٣٢٠ (ء) ٤٠

---

(٦) **الحد الذي قيمته ١٦٩ في المتتابعة الحسابية :** (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ....) **هو** ....

(أ) $ح_{٢٠}$ (ب) $ح_{٣٢}$ (جـ) $ح_{٣٠}$ (ء) $ح_{٤٢}$

---

(٧) **اذا كان :** د(س) = $س^{٢}$ − س + ٤ **فان :** $د^{\prime}$(٢) + د(٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٩ (ء) ١٨

تابع بقية الأسئلة في الصفحة التالية

الأسئلة المقالية :

(أ) **متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فيها :** $ح_{١} = ٤ ح_{٣}$ ، $ح_{٢} + ح_{٥} = ٣٦$ **أوجد :**

مجموع الخمسة حدود الأولى منها

(ب) **اكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة :** $ص = \frac{س + ٣}{س + ١}$ **عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي ١**

انتهت الاسئلة

كيفية طباعة صفحات معينة من ملف معين

مثلا ازاى نطبع الصفحات من صفحة 4 الى صفحة 9

